

# Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen

Spierig, Siegfried

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 15, 1963,  
S.133-165



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# **Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen<sup>1)</sup>**

Von Siegfried Spierig

Vorgelegt von Herrn E. Pestel

(Eingegangen am 6. 3. 1964)

**Übersicht:** Zweidimensionale Kontinua wie Scheiben, Platten und Schalen lassen sich näherungsweise dadurch berechnen, daß man sie durch ein Gitterrostmodell ersetzt. In der vorliegenden Arbeit wird eine Reihe von Gitterrostmodellelementen verschiedener Berandung entwickelt, aus denen sich beliebige Gitterroste nach dem Baukastenprinzip zusammenstellen lassen. Schließlich werden für diese Modellelemente die für praktische Anwendungen nützlichen Steifigkeitsmatrizen angegeben.

*Summary:* Disc-, plate- and shell-problems can be solved approximately by taking a grid model as a substitute instead of the original structure. In this paper a number of grid elements of different shape are developed by composition of which any grid model can be obtained. In addition the stiffness-matrices for these grid elements are derived, which are useful for their application.

## **1. Einleitung**

### **1.1 Aufgabenstellung**

Die Lösung sowohl statischer als auch dynamischer Scheiben-, Platten- und Schalenprobleme führt auf partielle Differentialgleichungen, für die nur in wenigen, sehr einfachen Sonderfällen geschlossene Lösungen bekannt sind. Im allgemeinen ist man daher auf Näherungslösungen angewiesen. Die zahlreichen Verfahren zu ihrer Gewinnung lassen sich im wesentlichen in drei Gruppen einteilen:

#### **Gruppe 1**

Die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung wird näherungsweise unter Beachtung der vorgegebenen Randbedingungen gelöst (z. B. Differenzenverfahren, Ritzsches Verfahren).

---

<sup>1)</sup> Gekürzte Fassung der von der Technischen Hochschule Hannover, Fakultät für Maschinenwesen, genehmigten gleichnamigen Dissertation des Verfassers. Referent: Prof. Dr.-Ing. E. Pestel, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann, Tag der Promotion: 12. Juli 1963. Der Verfasser dankt Herrn Prof. Pestel für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Anteilnahme an ihrem Zustandekommen.

### Gruppe 2

Das gegebene Kontinuum (Scheibe, Platte, Schale) wird in eine Anzahl einfach berandeter Elemente aufgelöst, für die unter Annahme vereinfachter Randbedingungen und Belastungen geschlossene Lösungen angegeben werden können. Aus den Lösungen für die einzelnen Elemente wird unter Inkaufnahme von gewissen Unstetigkeiten an den Elementengrenzen eine Näherungslösung für das Gesamtsystem konstruiert.

### Gruppe 3

Auch hier wird das gegebene Kontinuum in einfach berandete Elemente aufgelöst. Im Gegensatz zu den Verfahren der vorigen Gruppe wird jedoch jedes einzelne Element des Kontinuums näherungsweise durch ein möglichst einfaches Modell mit beschränkter Anzahl von Freiheitsgraden ersetzt. Das so gebildete Ersatzsystem ist einer exakten Berechnung zugänglich, bzw. es kann bei seiner Berechnung jede gewünschte Genauigkeit erzielt werden, wenn man Iterations- oder Relaxationsverfahren anwendet.

In der Vergangenheit sind zur Lösung von speziellen Aufgaben aus dem angegebenen Problemkreis zumeist Näherungsverfahren der ersten Gruppe benutzt worden. In neuerer Zeit erfreuen sich jedoch auch die Verfahren der zweiten (z. B. *R. W. Clough* [11, 12]) und besonders diejenigen der dritten Gruppe zunehmender Beliebtheit. Als Ersatzsysteme werden bei den Verfahren der dritten Gruppe z. B. Gitterroste (*Riedel* [3], *Hrennikoff* [4, 5], *Leckie* [6], *Fahr* [7]) und Torsionskastenmodelle (*Levy* [8], *Bergmann-Pestel* [9, 10]) benutzt.

Der wesentlichste Grund für die zunehmende Bevorzugung von Näherungsverfahren der dritten Gruppe dürfte folgender sein: Bei dieser Gruppe von Näherungsverfahren entsteht der Fehler, mit dem die Näherungslösung behaftet ist, nicht im Verlaufe eines formalen Rechenprozesses, sondern liegt in dem Unterschied zwischen Original und Modell begründet. Die Fehlerquelle ist dadurch für den Ingenieur qualitativ überschaubar, und er ist in der Lage, durch zweckmäßige Wahl des Modellaufbaues die Güte der Näherung in gewissem Umfange positiv zu beeinflussen.

Weiterhin haben verschiedene von *F. Leckie* und *G. Lindberg* durchgeführte, bisher unveröffentlichte Vergleichsrechnungen gezeigt, daß bei gleichem Rechenaufwand das Gitterrostmodell nach *Hrennikoff* [4, 5] (Gruppe 3 der Näherungsverfahren) z. T. wesentlich genauere Ergebnisse liefert als alle betrachteten Konkurrenzverfahren.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die näherungsweise Behandlung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrost-Ersatzmodellen dadurch zu vereinfachen, daß eine Reihe von Modellelementen verschiedener Umrandungsform bereitgestellt wird, die nach dem Baukastenprinzip zu beliebigen Ersatzmodellen zusammengesetzt werden können.

## 1.2 Geschichtliches

Auf die Äquivalenz der Spannungszustände in einer Scheibe und in einem beliebig engmaschigen Fachwerk gleicher Berandung und gleicher Belastung hat erstmals *F. Klein* 1903 in einem Vortrag vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft hingewiesen [1]. Darauf aufbauend hat *K. Wieghardt* [2] im Jahre

1906 diese Äquivalenz für praktische Zwecke nutzbar zu machen versucht, jedoch mit gegenüber der heutigen gerade umgekehrter Zielsetzung: Für balkenförmige Fachwerkträger, wie sie z. B. als Tragwerke für Brückenbauten vielfach verwendet werden, sollten die Stabkräfte näherungsweise aus der Spannungsverteilung eines entsprechenden kontinuierlichen Balkens ermittelt werden. Die praktische Verwendbarkeit dieser Idee ist jedoch dadurch stark eingeschränkt, daß die Spannungsverteilung (Airysche Spannungsfunktion) für den kontinuierlichen Ersatzbalken bekannt sein muß. Nun ist für den isotropen kontinuierlichen Balken die Spannungsverteilung für eine Vielzahl von Lastfällen bekannt. Leider sind jedoch die zu untersuchenden Fachwerke in den wenigsten Fällen isotrop (z. B. Aufbau aus gleichseitigen Dreiecken mit nur gleichen Stäben). Man ist also gezwungen, einen kontinuierlichen Balken als Ersatzsystem zu benutzen, der sich ebenso anisotrop verhält wie das vorgelegte Fachwerk. Für solche anisotropen, kontinuierlichen Balken kann aber leider nur in Ausnahmefällen auf eine bekannte Spannungsfunktion zurückgegriffen werden.

Ein weiterer Grund dafür, daß die Idee von *Wiegardt* keinen Eingang in die ingenieurmäßige Praxis fand, mag der folgende gewesen sein:

Das Bedürfnis nach einem solchen Rechenverfahren ging in dem Maße zurück, wie sich die Erkenntnis durchsetzte, daß man Fachwerke, die streng genommen hochgradig unbestimmte Systeme sind, mit erstaunlich guter Näherung wie statisch bestimmte Systeme mit gelenkigen Knoten behandeln darf.

Im Jahre 1927 wurden die von *Klein* und *Wiegardt* entwickelten Ideen wieder aufgegriffen von *W. Riedel* [3], der für einen prismatischen Körper, der zwischen zwei starren Platten gestaucht wird, den Verformungszustand und die Spannungsverteilung näherungsweise ermittelte. *Riedel* hat dabei den wirklichen, kontinuierlichen Körper durch einen aus quadratischen Elementen (Abb. 1.1) aufgebauten Gitterrost angenähert.

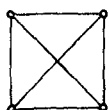


Abb. 1.1. Gitterrostelement von *Riedel*

Entscheidende Impulse erhielt die Methode, Kontinua näherungsweise durch Gitterrostmodelle zu ersetzen, durch die 1940 erschienene bahnbrechende Arbeit von *Hrennikoff* [4]. In dieser Arbeit werden für die Behandlung des Scheibenproblems Modellelemente folgender Formen entwickelt: Quadrat, Rechteck und gleichseitiges Dreieck. Außerdem findet sich hier erstmalig ein Gitterrost-Modellelement zur Behandlung des Plattenproblems, und zwar ein Element von quadratischer Form. In einer späteren Arbeit von *Hrennikoff* [5] finden sich Hinweise auf die Anwendung der Gitterrostmodelle auf dreidimensionale Kontinua und auf zylindrische Schalen.

In neuerer Zeit sind Gitterrostmodelle u. a. von *Leckie* [6] für die Berechnung von Plattenschwingungen und von *Fahr* [7] bei der Untersuchung zylindrischer Schalen verwendet worden.

## 2. Gewinnung der Modellelemente

### 2.1 Grundtypen von Modellelementen

Wie bereits eingangs erwähnt, ist es unser Ziel, Modellelemente verschiedener Konfiguration zu entwickeln, aus denen beliebige elastische Strukturen aufgebaut werden können. Wünschenswerte Grundtypen solcher Bausteine sind die folgenden: Rechteck, Dreieck und Trapez.

Die Auffindung von Modellelementen erfolgt in zwei Schritten. Als erstes wird ein in geeigneter Weise aufgebauter Gitterrost gewählt, sodann werden die Querschnittsabmessungen für die Stäbe dieses Gitterrostes so festgelegt, daß die Deformationseigenschaften des Modellelementes mit denjenigen des zu ersetzenden Kontinuums möglichst weitgehend übereinstimmen. Die Wahl des zugrunde zu legenden Gitterrostes wird zunächst willkürlich vorgenommen, wobei man danach trachtet, mit möglichst wenigen Stäben auszukommen. Ein etwaiger ungeeigneter Gitterrost macht sich dadurch bemerkbar, daß dann die Durchführung des oben erwähnten zweiten Schrittes zu Widersprüchen führt.

Als geeignet haben sich Gitterroste mit den in Abb. 2.1 dargestellten Stabanordnungen erwiesen. (Auf die Ausbildung der Knoten wird bei den speziellen Beschreibungen der einzelnen Modelle eingegangen.) Für diese Gitterrostelemente sollen im folgenden die Stäbe dimensioniert werden. Soweit im Einzelfalle nichts Gegenteiliges gesagt ist, wird dabei vorausgesetzt, daß die Modellstäbe aus dem gleichen Werkstoff bestehen wie das zu ersetzende Kontinuum (gleicher Elastizitätsmodul).

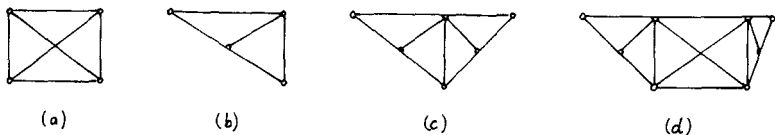


Abb. 2.1. Geeignete Stabanordnungen

a) Rechteck

b) Rechtwinkliges Dreieck

c) Allgemeines Dreieck

d) Trapez

## 2.2 Modellelemente zur Behandlung von Scheibenproblemen (ebener Spannungszustand)

### 2.2.1 Beschreibung des Vorgehens, Isotropie

Zur Berechnung der Querschnittsabmessungen der Gitterroststäbe empfiehlt sich das nachstehend beschriebene Vorgehen. Der wirklichen Scheibe wie auch ihrem Ersatzmodell werden nacheinander drei spezielle homogene Verzerrungszustände aufgezwungen:

- a) Reine Dehnung in  $x$ -Richtung
- b) Reine Dehnung in  $y$ -Richtung
- c) Reine Schubverzerrung eines achsenparallelen Rechtecks

Dabei bedeutet  $x, y$  irgendein in der Scheibenebene liegendes cartesisches Bezugssystem. Aus der Forderung, daß für jeden dieser drei Verzerrungszustände die erforderliche äußere Belastung des Modells und der wirklichen Scheibe statisch gleichwertig sein müssen, erhalten wir dann Bestimmungsgleichungen

für die Querschnittsabmessungen der Modellstäbe. Man überzeugt sich leicht, daß jedes so gewonnene Modellelement bei Zugrundelegung eines homogenen Verzerrungs- bzw. Spannungszustandes elastisch isotrop ist, wie auch immer der geometrische Aufbau des Gitterrostes sein mag. Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß jeder beliebige homogene Verzerrungszustand als Linearkombination der benutzten drei speziellen Verzerrungszustände darstellbar ist.

Während für homogene Verzerrungs- bzw. Spannungszustände die Deformationseigenschaften von Original und Modell definitionsgemäß exakt übereinstimmen, ergibt sich im vornehmlich interessierenden inhomogenen Fall exakte Übereinstimmung nur im Grenzfall infinitesimal kleiner Modellelemente [2]. Da jedoch nur das Rechnen mit endlich großen Elementen möglich ist, erhält man Näherungslösungen, die um so besser sind, je weniger sich der Verzerrungszustand innerhalb eines einzelnen Modellelementes ändert, d. h. je kleiner die Modellelemente sind. Es muß hier ein Kompromiß zwischen der Forderung nach Güte der Annäherung durch das Ersatzsystem und der Forderung nach möglichst geringem Rechenaufwand gesucht werden, ein Erfordernis, das allen Näherungsverfahren eigentümlich ist.

## 2.2.2 Beschreibung der einzelnen Elemente

### 2.2.2.1 Rechteck

Dieses Modell ist bereits von *Hrennikoff* [4, 5] angegeben worden. Es erscheint jedoch zweckmäßig, die Entwicklung der Vollständigkeit halber hier zu wiederholen.

Das Modell (Abb. 2.2) besteht aus vier Randstäben 1, 2, 3 und 4 und zwei im Innern liegenden Diagonalstäben 5 und 6. Äußere Kräfte sollen nur an den vier gelenkig ausgebildeten Eckpunkten *A*, *B*, *C* und *D* angreifen, so daß alle Stäbe nur Normalkräfte übertragen. Die Diagonalstäbe sind am Kreuzungspunkt nicht verbunden.

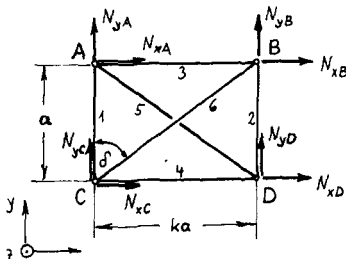


Abb. 2.2. Rechteckiges Modellelement

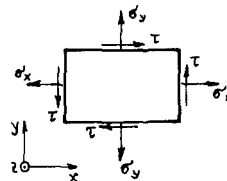


Abb. 2.3. Belastung am Original

Das so definierte Modell sei nun ebenso wie das zugehörige Original einem durch die Größen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_{xy}$  beschriebenen allgemeinen homogenen Verzerrungszustand unterworfen. Dem entspricht nach dem Hookechen Gesetz

im Falle des ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_z = 0$ ) am Original (Abb. 2.3) der Spannungszustand

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau &= G \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Wenn die an den Eckpunkten des Modells anzubringenden Ersatzlasten  $N_x$  und  $N_y$  (Abb. 2.2) der Belastung des Originals statisch gleichwertig sein sollen, muß gelten:

$$\left. \begin{aligned} -N_{xA} &= N_{xD} = \frac{a h}{2} (\sigma_x - k \tau) \\ N_{xB} &= -N_{xC} = \frac{a h}{2} (\sigma_x + k \tau) \\ N_{yA} &= -N_{yD} = \frac{a h}{2} (k \sigma_y - \tau) \\ N_{yB} &= -N_{yC} = \frac{a h}{2} (k \sigma_y + \tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Diese Ersatzlasten müssen nun an jeder Modellecke mit den betreffenden, in den Modellstäben auftretenden Stabkräften im Gleichgewicht stehen. Für den Knoten  $A$  (weitere Knoten brauchen nicht betrachtet zu werden, da wegen der doppelten Symmetrie des Modells alle Knoten gleichwertig sind) lauten die Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Abb. 2.4):

$$\left. \begin{aligned} S_3 + S_5 \sin \delta &= -N_{xA} \\ S_1 + S_5 \cos \delta &= N_{yA} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Allgemein gilt für die Stabkraft  $S_i$

$$S_i = F_i E \varepsilon_i, \quad (2.4)$$

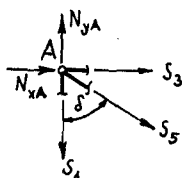


Abb. 2.4. Gleichgewicht am Knoten  $A$



Abb. 2.5. Definition von  $\varphi_i$

wobei  $\varepsilon_i$  die Dehnung des betreffenden Stabes ist, die sich mittels der Beziehung

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i \quad (2.5)$$

auf die vorgegebenen Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_{xy}$  zurückführen läßt (vgl. [13], dort S. 33–5).  $\varphi_i$  bezeichnet den Winkel, den die Achse des  $i$ -ten Stabes mit der  $x$ -Achse bildet (Abb. 2.5). Indem wir die rechte und die linke Seite des Gleichungssystems (2.3) mit Hilfe der Beziehungen (2.2) und (2.1) bzw. (2.4) und (2.5) umformen, erhalten wir mit  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = 0$ ,  $\varphi_5 = \pi/2 + \delta$ :

$$\left. \begin{aligned} F_3 \varepsilon_x + F_5 (\varepsilon_x \sin^2 \delta + \varepsilon_y \cos^2 \delta - \varepsilon_{xy} \cos \delta \sin \delta) \sin \delta \\ = \frac{a h (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)}{2 (1 - \nu^2)} - \frac{k a h \varepsilon_{xy}}{4 (1 + \nu)} \\ F_1 \varepsilon_y + F_5 (\varepsilon_x \sin^2 \delta + \varepsilon_y \cos^2 \delta - \varepsilon_{xy} \cos \delta \sin \delta) \cos \delta \\ = \frac{k a h (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2 (1 - \nu^2)} - \frac{a h \varepsilon_{xy}}{4 (1 + \nu)} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Die Gleichungen (2.6) müssen für jeden der drei in 2.2.1 beschriebenen speziellen Verzerrungszustände erfüllt sein. Es ist deshalb ein Koeffizientenvergleich für die drei Verzerrungsgrößen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_{xy}$  durchzuführen, der auf ein System von sechs Bestimmungsgleichungen für die drei gesuchten Stabquerschnitte  $F_1$ ,  $F_3$  und  $F_5$  führt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x: \quad F_3 + F_5 \sin^2 \delta &= \frac{a h}{2 (1 - \nu^2)} & a) \\ F_5 \sin^2 \delta \cos \delta &= \frac{\nu k a h}{2 (1 - \nu^2)} & b) \\ \varepsilon_y: \quad F_5 \sin \delta \cos^2 \delta &= \frac{\nu a h}{2 (1 - \nu^2)} & c) \\ F_1 + F_5 \cos^3 \delta &= \frac{k a h}{2 (1 - \nu^2)} & d) \\ \varepsilon_{xy}: \quad F_5 \sin^2 \delta \cos \delta &= \frac{k a h}{4 (1 + \nu)} & e) \\ F_5 \sin \delta \cos^2 \delta &= \frac{a h}{4 (1 + \nu)} & f) \end{aligned} \right\} \quad (2.7 \text{ a-f})$$

Aus dem Vergleich von (2.7b) mit (2.7e) und (2.7c) mit (2.7f) folgt, daß das überbestimmte Gleichungssystem (2.7) nur für  $\nu = 1/3$  widerspruchsfrei ist. Die Lösung lautet dann unter Berücksichtigung von  $k = \tan \delta$  (vgl. Abb. 2.2):

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_2 &= \frac{3}{16} (3 \tan \delta - \cot \delta) a h \\ F_3 = F_4 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \delta) a h \\ F_5 = F_6 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} a h \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Hinsichtlich der Stäbe 2, 4 und 6 ist von der Tatsache Gebrauch gemacht worden, daß sie aus Symmetriegründen die gleichen Querschnitte haben müssen wie die entsprechenden Stäbe 1, 3 und 5.



Für  $\delta < 30^\circ$  werden die Querschnittsflächen  $F_1$  und  $F_2$ , für  $\delta > 60^\circ$  werden  $F_3$  und  $F_4$  negativ. Die Möglichkeit des Auftretens negativer Querschnittsdaten ist allen Gitterrostmodellen eigentümlich. Ein solches Modell ist dann zwar mechanisch nicht realisierbar, die mathematische Analogie zwischen Modell und Original wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt.

Für den Sonderfall des Quadrats ( $\delta = 45^\circ$ ) vereinfachen sich die Beziehungen (2.8) zu

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_2 = F_3 = F_4 &= \frac{3}{8} a h \\ F_5 = F_6 &= \frac{3}{8} \sqrt{2} a h \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß *Hrennikoff* [4, 5] für die Querschnitte der Randstäbe 1, 2, 3 und 4 die doppelten der hier mitgeteilten Werte angibt. Das liegt daran, daß *Hrennikoff* nicht die Stabquerschnitte für ein einzelnes Element, sondern für den daraus aufgebauten Gitterrost meint. Im Innern eines solchen Rostes addieren sich dabei die Querschnittsflächen der zusammenfallenden Stäbe zweier Nachbar-elemente. Wenn die Nachbar-elemente gleich sind, so ergeben sich gerade die von *Hrennikoff* angegebenen doppelten Werte.

### 2.2.2.2 Rechtwinkliges Dreieck

Das Modell (Abb. 2.6) besteht aus den drei Randstäben 1, 2 und 4 und dem inneren Stab 3. Äußere Kräfte sollen nur an den drei gelenkig ausgeführten Eckpunkten *A*, *B* und *C* angreifen. Der Endpunkt *D* des Stabes 3, der gleitend auf dem Stab 4 gelagert ist, ist durch ein starres Zahnstangengetriebe in der Mitte des Stabes 4 fixiert. Die Stäbe 1, 2 und 3 haben nur Normalkräfte aufzunehmen, während Stab 4 infolge der internen Belastung bei *D* auch Biegemomente und Querkräfte zu übertragen hat. Hinsichtlich dieser Belastung wird Stab 4 als starr vorausgesetzt, so daß er stets gerade bleibt.

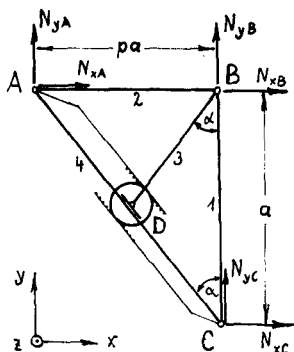


Abb. 2.6. Rechtwinkliges dreieckiges Modellelement

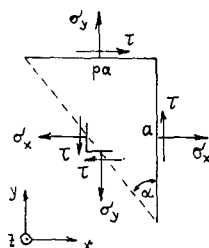


Abb. 2.7. Belastung am Original

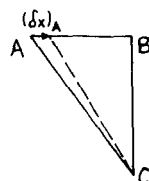


Abb. 2.8. Virtuelle Verrückung  $(\delta x)$

Das der kontinuierlichen Beanspruchung  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  der wirklichen Scheibe (Abb. 2.7) statisch gleichwertige System von an den Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  angreifenden Ersatzlasten (Abb. 2.6) läßt sich am einfachsten mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen ermitteln. Zur Berechnung der Kraft  $N_{xA}$  beispielsweise erteilen wir dem Knoten  $A$  eine virtuelle Verrückung  $(\delta x)_A$ , während die Knoten  $B$  und  $C$  ihre Lage nicht ändern (Abb. 2.8). Die virtuelle Arbeit des Ersatzlastensystems ist dann

$$\delta W_{\text{Modell}} = N_{xA} \cdot (\delta x)_A \quad (2.10)$$

Am Original werden bei dieser Verrückung virtuelle Arbeiten geleistet von der am Rand  $AB$  wirksamen Schubspannung  $\tau$ , ferner von den am Rand  $AC$  angreifenden Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau$ . (Der Rand  $AC$  ist dabei als durch eine infinitesimal feine Treppenkurve ersetzt gedacht, um unnötige Umrechnungen zu vermeiden.) Die insgesamt geleistete virtuelle Arbeit ist, wenn  $h$  die Dicke der Scheibe bezeichnet,

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{Original}} &= \frac{1}{2} \tau (p a) h (\delta x)_A - \frac{1}{2} \sigma_x a h (\delta x)_A - \frac{1}{2} \tau (p a) h (\delta x)_A = \\ &= - \frac{1}{2} \sigma_x a h (\delta x)_A \quad (2.11) \end{aligned}$$

Da die virtuellen Arbeiten statisch äquivalenter Systeme gleich sein müssen, folgt aus (2.10) und (2.11)

$$N_{xA} = - \frac{\sigma_x a h}{2} \quad (2.12)$$

In entsprechender Weise lassen sich auch die übrigen Ersatzlasten herleiten. Das Ergebnis lautet für die bei  $A$  und  $B$  angreifenden Ersatzlasten zusammengefaßt:

$$\left. \begin{aligned} N_{xA} &= - \frac{\sigma_x a h}{2} \\ N_{yA} &= - \frac{\tau a h}{2} \\ N_{xB} &= \frac{\sigma_x a h}{2} + p \frac{\tau a h}{2} \\ N_{yB} &= p \frac{\sigma_y a h}{2} + \frac{\tau a h}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Alle Ersatzlasten müssen mit den zugehörigen Stabkräften im Gleichgewicht stehen. Als Gleichgewichtsbedingungen lesen wir aus Abb. 2.9 für die Knoten  $A$  und  $B$  ab:

$$\left. \begin{aligned} S_2 + \left( \frac{1}{2} S_3 + S_4 \right) \sin \alpha &= - N_{xA} \\ \left( \frac{1}{2} S_3 - S_4 \right) \cos \alpha &= - N_{yA} \\ S_2 + S_3 \sin \alpha &= N_{xB} \\ S_1 + S_3 \cos \alpha &= N_{yB} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

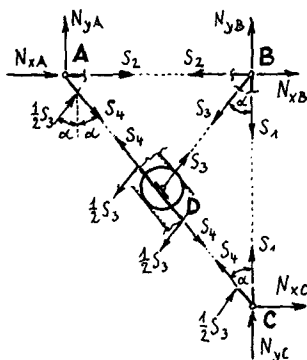


Abb. 2.9. Auf die Knoten des Modells einwirkende Kräfte

Die Gleichgewichtsbedingungen für den letzten der drei Knoten C würden darüber hinaus keine neuen Informationen liefern, da hier das Gleichgewicht bereits durch die Tatsache garantiert ist, daß das System der Ersatzlasten ein Gleichgewichtssystem ist. Umformung von (2.14) mit Hilfe von (2.13) und (2.1) sowie (2.4) und (2.5) ergibt mit  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_3, 4 = \pi/2 \mp \alpha$ :

$$\begin{aligned}
 F_2 \varepsilon_x + \left[ \left( \frac{1}{2} F_3 + F_4 \right) (\varepsilon_x \sin^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \alpha) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{2} F_3 - F_4 \right) \varepsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right] \sin \alpha &= \frac{a h (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)}{2 (1 - \nu^2)} \\
 \left[ \left( \frac{1}{2} F_3 - F_4 \right) (\varepsilon_x \sin^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \alpha) + \left( \frac{1}{2} F_3 + F_4 \right) \varepsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right] \cos \alpha &= \\
 &= \frac{a h \varepsilon_{xy}}{4 (1 + \nu)} \quad (2.15) \\
 F_2 \varepsilon_x + F_3 (\varepsilon_x \sin^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \alpha + \varepsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha &= \\
 &= \frac{a h (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)}{2 (1 - \nu^2)} + \frac{p a h \varepsilon_{xy}}{4 (1 + \nu)} \\
 F_1 \varepsilon_y + F_3 (\varepsilon_x \sin^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \alpha + \varepsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha &= \\
 &= \frac{p a h (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2 (1 - \nu^2)} + \frac{a h \varepsilon_{xy}}{4 (1 + \nu)}
 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir hieraus ähnlich wie beim vorigen Modell ein überbestimmtes Gleichungssystem für die Querschnitte der Stäbe 1 bis 4, das gerade für  $\nu = 1/3$  widerspruchsfrei ist und dann unter Berücksichtigung von  $p = \tan \alpha$  (vgl. Abb. 2.6) die Lösung

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= \frac{3}{16} (3 \tan \alpha - \cot \alpha) a h \\
 F_2 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \alpha) a h \\
 F_3 &= \frac{3}{16 \sin \alpha \cos^2 \alpha} a h \\
 F_4 &= \frac{3}{32 \sin \alpha \cos^2 \alpha} a h
 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

liefert.

Für  $\alpha < 30^\circ$  wird  $F_1$  und für  $\alpha > 60^\circ$   $F_2$  negativ. Bemerkenswert ist der Zusammenhang mit der Lösung (2.8) für das Rechteckmodell. Das rechtwinklige Dreieck entspricht genau einer Hälfte des entsprechenden Rechtecks, wobei die Diagonale, entlang der das Rechteck geteilt ist, im Dreieck den halben Querschnitt hat.

Wenn man das Zahnstangengetriebe in Abb. 2.6 wegläßt und dafür den Stab 3 durch ein festes Halbgelenk am Stab 4 anschließt, erhält man ebenfalls ein brauchbares Modell. Seine Berechnung ist jedoch sehr viel mühsamer, da wegen unterschiedlicher Normalkräfte in den beiden Hälften von Stab 4 der Punkt  $D$  nicht in der Mitte zwischen  $A$  und  $C$  verbleibt und für Stab 3 deshalb nicht die einfache Beziehung (2.5) gilt. Man bekommt schließlich für die Stäbe 1, 2 und 4 das gleiche Ergebnis wie bei dem Modell mit Getriebe, für Stab 3 jedoch den abweichenden Wert

$$F_3 = \frac{3}{64 \sin^3 \alpha \cos^4 \alpha} a h$$

Wenngleich sich auch bei der getriebelosen Variante einfache Ausdrücke für die Stabquerschnitte ergeben, so ist die Verwendung dieses Modells jedoch nicht empfehlenswert, da die kinematische Unbestimmtheit des Punktes  $D$  die praktische Handhabung des Modells erheblich erschwert. Bei den im folgenden noch zu besprechenden Modellen werden deshalb von vornherein alle inneren Anlenkpunkte durch geeignete Getriebe kinematisch fixiert.

### 2.2.2.3 Allgemeines Dreieck

Die gewählte Modellordnung ist in Abb. 2.10 dargestellt. Die Getriebe zur Fixierung der Anlenkpunkte  $E$  und  $F$  sind die gleichen wie bei dem zuvor behandelten Modell, das Getriebe zur Fixierung des Punktes  $D$  hat wegen der im allgemeinen außermittigen Lage von  $D$  ein zweikräftiges Zahnrad (Abb. 2.11) mit dem Radienverhältnis  $r_A/r_B = p/q = \tan \alpha / \tan \beta$ . Äußere Lasten sollen nur an den drei gelenkigen Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  angreifen können.

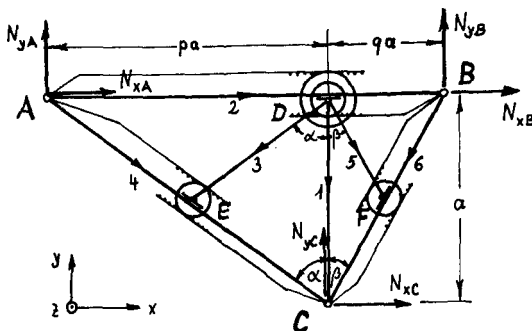


Abb. 2.10. Modellelement für ein allgemeines Dreieck



Abb. 2.11. Getriebe zur Fixierung des Anlenkpunktes  $D$

Die Innenstäbe 1, 3 und 5 übertragen lediglich Normalkräfte, während die Randstäbe 2, 4 und 6 auch Querkkräfte und Biegemomente zu übertragen haben als Folge der in den Anlenkpunkten  $D$ ,  $E$  und  $F$  senkrecht zur Achse dieser Stäbe wirkenden internen Belastung. Hinsichtlich dieser Belastung werden die Randstäbe als starr vorausgesetzt, so daß sie gerade bleiben.

Für das dem Spannungszustand  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$  im Original statisch äquivalente Ersatzlastensystem (Abb. 2.10) erhalten wir nach dem in Abschnitt 2.2.2.2 beschriebenen Vorgehen, wenn  $h$  die Scheibendicke bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} N_{xA} &= -\frac{\sigma_x a h}{2} + \frac{\tau a h}{2} q \\ N_{yA} &= \frac{\sigma_y a h}{2} q - \frac{\tau a h}{2} \\ N_{xC} &= -\frac{\tau a h}{2} (p + q) \\ N_{yC} &= -\frac{\sigma_y a h}{2} (p + q) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten ist zu beachten, daß die an den Anlenkpunkten  $E$  und  $F$  in die Stäbe 4 bzw. 6 eingeleiteten Kräfte durch die gewählte Getriebekonstruktion je zur Hälfte auf die betreffenden Endpunkte übertragen werden. Entsprechend werden die bei  $D$  eingeleiteten Kräfte im Verhältnis  $p : q$  auf die Endpunkte  $A$  und  $B$  übertragen. Aus den Abbildungen 2.12 und 2.13 liest man ab, wobei die Abkürzung  $t$  für  $q/(p + q)$  steht:

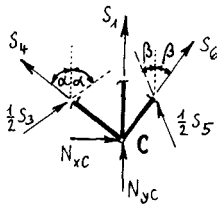


Abb. 2.12. Kräfte am Knoten C

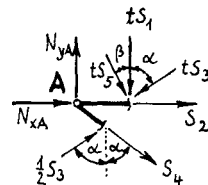


Abb. 2.13. Kräfte am Knoten A

$$\left. \begin{aligned} -\left(S_4 - \frac{1}{2} S_3\right) \sin \alpha + \left(S_6 - \frac{1}{2} S_5\right) \sin \beta &= -N_{xC} \\ S_1 + \left(S_4 + \frac{1}{2} S_3\right) \cos \alpha + \left(S_6 + \frac{1}{2} S_5\right) \cos \beta &= -N_{yC} \\ S_2 + \left[S_4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{p+q}\right) S_3\right] \sin \alpha + \frac{q}{p+q} S_5 \sin \beta &= -N_{xA} \\ \frac{q}{p+q} S_1 + \left[S_4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{p+q}\right) S_3\right] \cos \alpha + \frac{q}{p+q} S_5 \cos \beta &= N_{yA} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Die entsprechenden Gleichungen für den dritten Knoten  $B$  liefern keine neuen Informationen. Dank der durch die Zahnstangengetriebe sichergestellten kinematischen Bestimmtheit lassen sich die Stabkräfte  $S_i$  alle mittels der einfachen Beziehungen (2.4) und (2.5) auf die drei Verzerrungsgrößen der Scheibe zurückführen. Dabei ist  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_{3,4} = \pi/2 \mp \alpha$ ,  $\varphi_{5,6} = \pi/2 \pm \beta$  zu setzen.

Sodann sind in (2.18) noch die Ersatzlasten mit Hilfe von (2.17) und (2.1) auszudrücken und der Koeffizientenvergleich bezüglich der drei Verzerrungsgrößen durchzuführen. Das dabei entstehende überbestimmte Gleichungssystem ist wiederum gerade für  $\nu = 1/3$  widerspruchsfrei und liefert dann mit  $p = \tan \alpha$ ,  $q = \tan \beta$  (vgl. Abb. 2.10) folgende Lösungen

a) Für  $\alpha \neq \beta$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{16} [3 (\tan \alpha + \tan \beta) - (\cot \alpha + \cot \beta) + Z (\cot \alpha + \cot \beta)] a h \\ F_2 &= \frac{3}{16} [3 - \tan^2 \alpha + \tan \alpha \tan \beta - \tan^2 \beta - Z \tan \alpha \tan \beta] a h \\ F_3 &= \frac{3}{16 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( 1 + Z \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \right) a h \\ F_4 &= \frac{1}{2} F_3 \\ F_5 &= \frac{3}{16 \sin \beta \cos^2 \beta} \left( 1 + Z \frac{\tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \right) a h \\ F_6 &= \frac{1}{2} F_5 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$Z$  ist ein frei wählbarer Parameter. Man überzeugt sich leicht durch Vergleich von (2.19) und (2.16), daß die Lösung für  $Z = 0$  dem Aufbau des allgemeinen Dreiecks aus zwei rechtwinkligen Dreiecken, wie sie in Abschnitt 2.2.2.2 beschrieben sind, entspricht. Daneben existieren weitere gleichberechtigte Lösungen, insbesondere solche, bei denen eines der  $F_i$  verschwindet, der betreffende Stab also wegfällt. Diese Lösungen werden jedoch hier nicht weiter betrachtet.

b) Für  $\alpha = \beta$  (gleichschenkliges Dreieck):

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{8} (3 \tan \alpha - \cot \alpha) a h \\ F_2 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \alpha) a h \\ F_3 &= \frac{3}{16 \sin \alpha \cos^2 \alpha} (1 + Z') a h \\ F_4 &= \frac{3}{32 \sin \alpha \cos^2 \alpha} (1 - Z'') a h \\ F_5 &= \frac{3}{16 \sin \alpha \cos^2 \alpha} (1 + Z'') a h \\ F_6 &= \frac{3}{32 \sin \alpha \cos^2 \alpha} (1 - Z') a h \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$Z'$  und  $Z''$  sind frei wählbare Parameter. Die Kombination  $Z' = Z'' = 0$  entspricht z. B. ebenso wie der Fall  $Z = 0$  bei der Lösung für  $\alpha \neq \beta$  dem Aufbau des gleichschenkligen Dreiecks aus zwei rechtwinkligen Dreiecken, wie sie in

Abschnitt 2.2.2.2 beschrieben sind. Daneben sind auch noch weitere Kombinationen möglich, von denen hier jedoch nur der Fall  $Z' = Z'' = -1$  be-

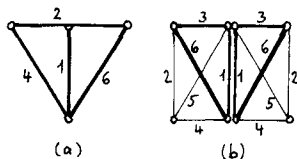


Abb. 2.14. Zusammenhang zwischen den Modellen für das gleichschenklige Dreieck a) und das Rechteck b)

trachtet werden soll. Hierfür erhalten wir das in Abb. 2.14 a) dargestellte einfache Modell mit den Stabquerschnitten

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{8} (3 \tan \alpha - \cot \alpha) a h \\ F_2 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \alpha) a h \\ F_4 = F_6 &= \frac{3}{16 \sin \alpha \cos^2 \alpha} a h \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Bemerkenswert ist noch der Zusammenhang zwischen den Modellen für das gleichschenklige Dreieck und das Rechteck. Es ist nämlich (vgl. Abb. 2.14)

$$\begin{aligned} F_{1\triangle} &= 2 F_{1\Box} = 2 F_{2\Box} \\ F_{2\triangle} &= F_{3\Box} = F_{4\Box} \\ F_{4\triangle} &= F_{6\triangle} = F_{5\Box} = F_{6\Box} \end{aligned}$$

wie man aus dem Vergleich der Formeln (2.21) und (2.8) für  $\alpha = \delta$  erkennt. Für den Sonderfall des gleichseitigen Dreiecks ( $\alpha = 30^\circ$ ) erhalten wir aus (2.21) das bereits von Hrennikoff [4] gefundene Ergebnis

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0 \\ F_2 = F_4 = F_6 &= \frac{1}{2} a h \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

bei dem der Mittelstab 1 entfällt (Abb. 2.15).

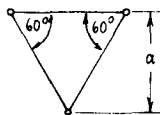


Abb. 2.15. Ersatzmodell für das gleichseitige Dreieck

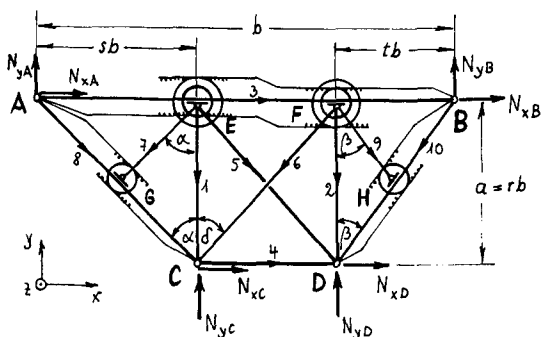


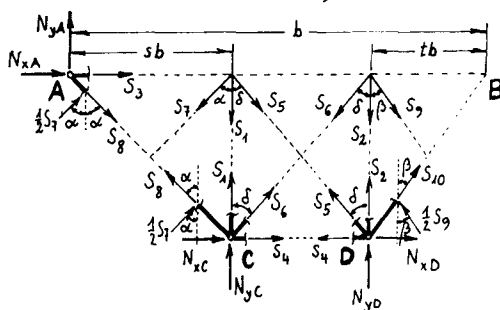
Abb. 2.16. Trapezförmiges Ersatzmodell

#### 2.2.2.4 Trapez

Die Modellanordnung ist in Abb. 2.16 dargestellt. Äußere Lasten sollen nur an den gelenkigen Eckpunkten A, B, C und D angreifen können. Die inneren

Stäbe 1, 2, 5, 6, 7 und 9 nehmen nur Normalkräfte auf, während die Randstäbe 3, 4, 8 und 10 zufolge der bei  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  eingeleiteten internen Belastung auch Querkkräfte und Biegemomente übertragen. Hinsichtlich dieser Belastung werden die Randstäbe als starr vorausgesetzt, so daß sie gerade bleiben. Sämtliche inneren Anlenkpunkte sind durch Getriebe kinematisch fixiert, die Diagonalstäbe 5 und 6 sind an ihrem Kreuzungspunkt nicht verbunden. Für das dem Spannungszustand im Original statisch äquivalente Ersatzsystem (Abb. 2.16) erhalten wir nach dem im Abschnitt 2.2.2.2 beschriebenen Vorgehen ( $h$  = Scheibendicke):

$$\left. \begin{aligned} N_{xA} &= -\frac{\sigma_x b h}{2} r + \frac{\tau b h}{2} (1-s) \\ N_{yA} &= \frac{\sigma_y b h}{2} (1-s) - \frac{\tau b h}{2} r \\ N_{xC} &= -\frac{\sigma_x b h}{2} r - \frac{\tau b h}{2} (1-t) \\ N_{yC} &= -\frac{\sigma_y b h}{2} (1-t) - \frac{\tau b h}{2} r \\ N_{xD} &= \frac{\sigma_x b h}{2} r - \frac{\tau b h}{2} (1-s) \\ N_{yD} &= -\frac{\sigma_y b h}{2} (1-s) + \frac{\tau b h}{2} r \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Abb. 2.17. Kräfte an den Knoten  $A$ ,  $C$  und  $D$ 

Aus Abb. 2.17 lesen wir folgende Bedingungen für das Gleichgewicht an den Knoten  $C$  und  $D$  ab:

$$\left. \begin{aligned} S_4 + S_6 \sin \delta - \left( S_8 - \frac{1}{2} S_7 \right) \sin \alpha &= -N_{xC} & \text{a)} \\ S_1 + S_6 \cos \delta + \left( S_8 + \frac{1}{2} S_7 \right) \cos \alpha &= -N_{yC} & \text{b)} \\ S_4 + S_5 \sin \delta - \left( S_{10} - \frac{1}{2} S_9 \right) \sin \beta &= N_{xD} & \text{c)} \\ S_2 + S_5 \cos \delta + \left( S_{10} + \frac{1}{2} S_9 \right) \cos \beta &= -N_{yD} & \text{d)} \end{aligned} \right\} \quad (2.24 \text{ a-d})$$

Bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten  $A$  müssen wir noch die von den bei  $E$  und  $F$  angreifenden Kräften herrührenden Reaktionen berücksichtigen, die aus zeichnerischen Gründen an dem Schnitt



durch Stab 3 unmittelbar rechts des Punktes  $A$  nicht mit eingetragen sind. Dabei sind die bei  $E$  wirksamen Kräfte mit dem Faktor  $(1 - s)$ , die bei  $F$  wirksamen Kräfte mit  $t$  zu multiplizieren, um den jeweils zum Knoten  $A$  hin übertragenen Anteil zu erhalten. Die Gleichgewichtsbedingungen für diesen Knoten lauten damit

$$\left. \begin{aligned} S_3 + [(1 - s)S_5 - tS_6] \sin \delta + \left\{ S_8 + \left[ \frac{1}{2} - (1 - s) \right] S_7 \right\} \sin \alpha + \\ + t S_9 \sin \beta = - N_{xA} \quad \text{e)} \\ (1 - s) S_1 + t S_2 + [(1 - s) S_5 + t S_6] \cos \delta + \\ + \left\{ S_8 + \left[ -\frac{1}{2} + (1 - s) \right] S_7 \right\} \cos \alpha + t S_9 \cos \beta = N_{yA} \quad \text{f)} \end{aligned} \right\} \quad (2.24\text{e-f})$$

Da die inneren Knoten  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  kinematisch fixiert sind, lassen sich alle Stabkräfte  $S_i$  ebenso wie bei dem zuvor behandelten Modell durch die einfachen Beziehungen (2.4) und (2.5) ausdrücken, wobei  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ ,  $\varphi_{5,6} = \pi/2 \pm \delta$ ,  $\varphi_{7,8} = \pi/2 \mp \alpha$ ,  $\varphi_{9,10} = \pi/2 \pm \beta$  zu setzen ist. Wenn wir dann noch in den sechs Gleichungen (2.24) die Ersatzlasten mittels (2.23) und (2.1) durch die drei Verzerrungsgrößen ausdrücken und deren Koeffizienten vergleichen, erhalten wir ein überbestimmtes Gleichungssystem für die Querschnitte der zehn Stäbe des Modells. Wie in allen früheren Fällen ist auch hier  $\nu = 1/3$  die Bedingung für Widerspruchsfreiheit. Die Auflösung des Gleichungssystems führt dann zu folgenden Ergebnissen:

a) Allgemeinerer Fall  $\alpha, \beta \neq \delta$  ( $\alpha, \beta, \delta \neq 0$ )

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{16} [3 (\tan \delta + \tan \alpha) - (\cot \delta + \cot \alpha) + Z \cot \delta \cot^2 \alpha] a h \\ F_2 &= \frac{3}{16} [3 (\tan \delta + \tan \beta) - (\cot \delta + \cot \beta) + Z \cot \delta \cot^2 \beta] a h \\ F_3 &= \frac{3}{16} \left[ 3 - \frac{\tan^3 \delta + \tan^3 \alpha + \tan^3 \beta + Z \tan \delta}{\tan \delta + \tan \alpha + \tan \beta} \right] a h \\ F_4 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \delta - Z) a h \\ F_5 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} \left( 1 + \frac{Z}{\tan^2 \delta - \tan^2 \beta} \right) a h \\ F_6 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} \left( 1 + \frac{Z}{\tan^2 \delta - \tan^2 \alpha} \right) a h \\ F_7 &= \frac{3}{16 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( 1 - Z \frac{\cot \alpha}{\tan \delta - \tan \alpha} \right) a h \\ F_8 &= \frac{3}{32 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( 1 - Z \frac{\cot \alpha}{\tan \delta + \tan \alpha} \right) a h \\ F_9 &= \frac{3}{16 \sin \beta \cos^2 \beta} \left( 1 - Z \frac{\cot \beta}{\tan \delta - \tan \beta} \right) a h \\ F_{10} &= \frac{3}{32 \sin \beta \cos^2 \beta} \left( 1 - Z \frac{\cot \beta}{\tan \delta + \tan \beta} \right) a h \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$Z$  ist wie im vorigen Abschnitt ein frei wählbarer Parameter. Dem Wert  $Z = 0$  entspricht der Aufbau des Trapezes aus einem Rechteckmodell und zwei Dreiecksmodellen. Für das gleichschenklige Trapez ( $\alpha = \beta$ ) sind daneben auch noch die Werte  $Z = \tan^2 \alpha - \tan^2 \delta$  und  $Z = \tan \alpha (\tan \delta - \tan \alpha)$  sinnvoll. Dabei entfallen die Stäbe 5 und 6 bzw. 7 und 9.

b) Sonderfall  $\alpha = \delta \neq \beta$  ( $\alpha, \beta, \delta \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{3}{8} (3 \tan \delta - \cot \delta) a h \\
 F_2 &= \frac{3}{16} [3 (\tan \delta + \tan \beta) - (\cot \delta + \cot \beta)] a h \\
 F_3 &= \frac{3}{16} \left[ 3 - \frac{2 \tan^3 \delta + \tan^3 \beta}{2 \tan \delta + \tan \beta} \right] a h \\
 F_4 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \delta) a h \\
 F_5 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} a h \\
 F_6 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} (1 + Z') a h \\
 F_7 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} (1 - 2 Z') a h \\
 F_8 &= \frac{3}{32 \sin \delta \cos^2 \delta} a h \\
 F_9 &= \frac{3}{16 \sin \beta \cos^2 \beta} a h \\
 F_{10} &= \frac{1}{2} F_9
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Der Wert  $Z'$  ist frei wählbar.  $Z' = 0$  hat dieselbe Bedeutung wie im allgemeinen Fall der Wert  $Z = 0$ . Daneben sind auch noch  $Z' = -1$  ( $F_6 = 0$ ) und  $Z' = 1/2$  ( $F_7 = 0$ ) sinnvolle Werte.

c) Sonderfall  $\beta = \delta \neq \alpha$  ( $\alpha, \beta, \delta \neq 0$ )

Die Ergebnisse entsprechen genau denen für den Sonderfall b). Man braucht nur die Indizes 1 und 2, 5 und 6, 7 und 9 sowie 8 und 10 miteinander zu vertauschen und  $\beta$  durch  $\alpha$  zu ersetzen.

d) Sonderfall  $\alpha = \beta = \delta$

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_2 &= \frac{3}{8} (3 \tan \delta - \cot \delta) a h \\ F_3 = F_4 &= \frac{3}{16} (3 - \tan^2 \delta) a h \\ F_5 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} (1 + Z'') a h \\ F_6 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} (1 + Z') a h \\ F_7 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} (1 - 2 Z') a h \\ F_8 &= \frac{3}{32 \sin \delta \cos^2 \delta} a h \\ F_9 &= \frac{3}{16 \sin \delta \cos^2 \delta} (1 - 2 Z'') a h \\ F_{10} &= \frac{3}{32 \sin \delta \cos^2 \delta} a h \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

$Z'$  und  $Z''$  sind frei wählbar.  $Z' = Z'' = 0$  entspricht wiederum dem Aufbau des Trapezes aus den drei selbständigen Teilmodellen Dreieck-Rechteck-Dreieck, während die Wertekombinationen  $Z' = Z'' = -1$  und  $Z' = Z'' = 1/2$  zu Modellen führen, bei denen die Stäbe 5 und 6 bzw. 7 und 9 entfallen.

### 2.3 Modellelemente zur Behandlung von Problemen des ebenen Formänderungszustandes

Die Berechnung der Stabquerschnitte erfolgt in der gleichen Weise wie zuvor für die Modelle zur Behandlung des ebenen Spannungszustandes. Jedoch ergeben sich jetzt andere Zusammenhänge zwischen den Verzerrungsgrößen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und den Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  bzw. den entsprechenden an den Modellecken anzubringenden Ersatzlasten. Für den bisher betrachteten ebenen Spannungszustand galt

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu \sigma_y \\ E \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Die entsprechende Beziehung für den ebenen Formänderungszustand lautet

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= (1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y \\ E \varepsilon_y &= (1 - \nu^2) \sigma_y - \nu (1 + \nu) \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Durch Kürzen mit  $1 - \nu^2$  und Einführen von

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.30)$$

läßt sich (2.29) in eine Form bringen, die der Beziehung (2.28) formal genau entspricht:

$$\left. \begin{aligned} E' \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu' \sigma_y \\ E' \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu' \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Damit sind alle unter Bezug auf den ebenen Spannungszustand hergeleiteten Modelle auch hier brauchbar, wenn man für die Modellstäbe den korrigierten Elastizitätsmodul  $E'$  zugrunde legt, eine Tatsache, auf die bereits *Hrennikoff* [4] hingewiesen hat. Im vorigen Kapitel haben wir gefunden, daß alle behandelten Modellelemente bei Anwendung auf Probleme des ebenen Spannungszustandes für das Material des zu ersetzenden Kontinuums die Querszahl  $\nu = 1/3$  erfordern. Entsprechend wird bei Anwendung auf Probleme des ebenen Verzerrungszustandes  $\nu' = 1/3$ , d. h.  $\nu = 1/4$  gefordert (vgl. hierzu auch S. 162).

## 2.4 Modellelemente zur Behandlung von Plattenproblemen

### 2.4.1 Beschreibung des Vorgehens

Zur Festlegung der hier benötigten elastischen Eigenschaften der Gitterroststäbe gehen wir in ähnlicher Weise vor wie früher bei den Modellelementen zur Behandlung des Scheibenproblems. Auch hier werden dem wirklichen Platten-element und dem es ersetzenden Modellelement nacheinander verschiedene spezielle Verzerrungszustände aufgezwungen. Um sie definieren zu können, führen wir ein cartesisches  $x, y, z$ -Koordinatensystem ein, dessen  $x, y$ -Ebene mit der Mittelebene der unverformten Platte zusammenfällt. Unter Bezug auf dieses Koordinatensystem lassen sich die speziellen Verformungszustände wie folgt beschreiben:

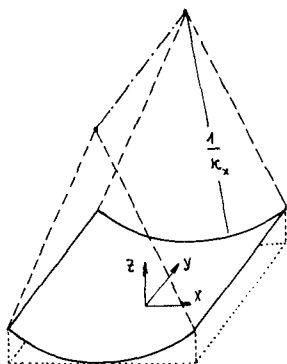


Abb. 2.18. Krümmung mit zur  $y$ -Achse paralleler Krümmungsachse  $\kappa_x = \partial^2 w / \partial x^2$

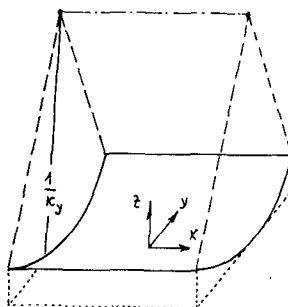


Abb. 2.19. Krümmung mit zur  $x$ -Achse paralleler Krümmungsachse  $\kappa_y = \partial^2 w / \partial y^2$

a) konstante Krümmung mit zur  $y$ -Achse paralleler Krümmungsachse

$$(\kappa_x \neq 0, \quad \kappa_y = 0, \quad \kappa_{xy} = 0; \quad \text{vgl. Abb. 2.18})$$

b) konstante Krümmung mit zur  $x$ -Achse paralleler Krümmungsachse

$$(\kappa_x = 0, \quad \kappa_y \neq 0, \quad \kappa_{xy} = 0; \quad \text{vgl. Abb. 2.19})$$

c) reine Verwindung bezüglich des  $x, y, z$ -Koordinatensystems

$$(\kappa_x = 0, \quad \kappa_y = 0, \quad \kappa_{xy} \neq 0; \quad \text{vgl. Abb. 2.20})$$

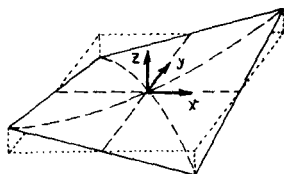


Abb. 2.20. Verwindung  $\kappa_{xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$

Um im Bedarfsfalle auch den Einfluß der Querkraftverformung näherungsweise berücksichtigen zu können, wird außerdem noch gleiches elastisches Verhalten von Original und Modell hinsichtlich der folgenden zwei speziellen Verzerrungszustände verlangt:

d) Verdrehung der zur  $x$ -Achse normalen Querschnittsflächen um den Winkel  $\gamma_{sx}$  (Abb. 2.21)

e) Verdrehung der zur  $y$ -Achse normalen Querschnittsflächen um den Winkel  $\gamma_{sy}$  (Abb. 2.22)

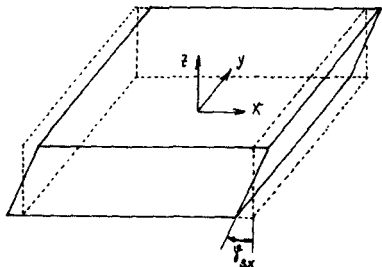


Abb. 2.21. Schubverformung infolge von Querkraft im Schnitt  $x = \text{const}$

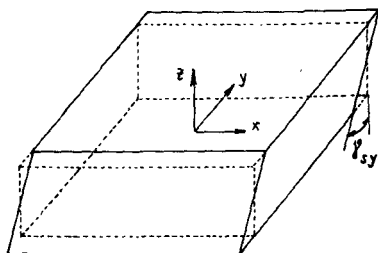


Abb. 2.22. Schubverformung infolge von Querkraft im Schnitt  $y = \text{const}$

Unter  $\gamma_s$  verstehen wir dabei den üblicherweise zur Beschreibung der in Wirklichkeit  $s$ -förmigen Querschnittsverzerrung benutzten mittleren Winkel.

Für jeden dieser insgesamt fünf speziellen Verformungszustände haben wir wieder die zugehörige äußere Belastung des Originals und daraus das statisch äquivalente System der an den Ecken des Modells anzubringenden Ersatzlasten zu ermitteln. Die erforderlichen elastischen Eigenschaften der Modellstäbe folgen dann aus der Bedingung, daß an den Knoten des Modells zwischen den von außen angreifenden Ersatzlasten und den von den Modellstäben auf Grund der vorgegebenen Verzerrung ausgeübten Momenten bzw. Kräften Gleichgewicht bestehen muß.

Die so gewonnenen Modellelemente sind bezüglich jedes homogenen (d. h. querkraftfreien) Biegezustandes dem zu ersetzenden Original elastisch völlig gleichwertig, insbesondere sind sie auch elastisch isotrop. Das folgt daraus, daß jeder beliebige homogene Biegezustand als Überlagerung der ersten drei der zugrunde gelegten speziellen Verzerrungszustände darstellbar ist. Bei nicht-homogenem Verformungszustand (d. h. Querkraftbiegung) ergibt sich exakte Übereinstimmung der elastischen Eigenschaften von Modell und Original ebenso wie bei den Modellen zur Behandlung des Scheibenproblems nur im Grenzfall infinitesimal kleiner Modellelemente.

### 2.4.2 Beschreibung der Modelle

Es werden dieselben Modelltypen wie bei der Behandlung des Scheibenproblems zugrunde gelegt. In Erweiterung der den Abschnitten 2.2.2.1 bis 2.2.2.4 jeweils vorangestellten Modellbeschreibungen wird hier noch folgendes vorausgesetzt:

1. Die äußeren Ecken, an denen die Ersatzlasten angreifen, sind als Scharniergelenke gemäß Abb. 2.23 ausgeführt.
2. Alle Stäbe sind schlaff gegenüber Verdrillung.

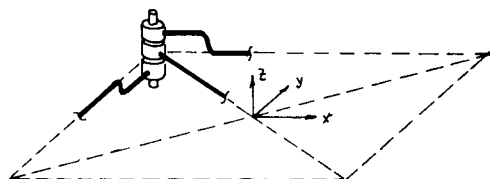


Abb. 2.23. Scharniergelenk

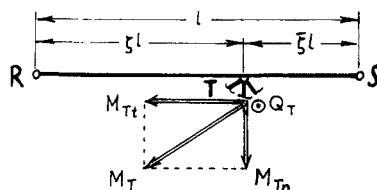
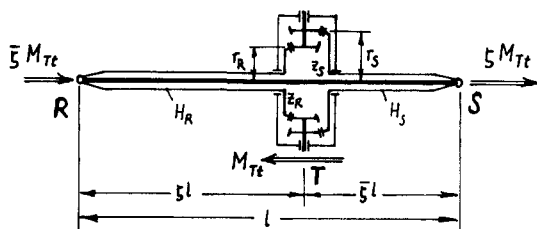


Abb. 2.24. Belastung an einem inneren Anlenkpunkt

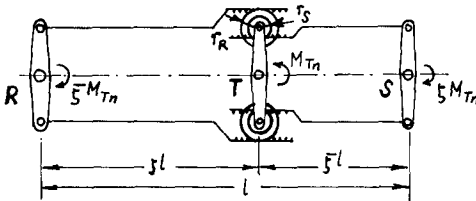
Weiterhin sind noch die Analoga zu den beim Scheibenproblem benutzten Getrieben zu formulieren. Wir betrachten dazu einen Stab mit den Endpunkten  $R$  und  $S$ , an den im Punkt  $T$  ein oder mehrere innere Stäbe angelenkt sind (Abb. 2.24). Die inneren Stäbe üben auf den durchgehenden Stab  $RS$  bzw. auf die ihn entlastenden Getriebe ein Moment  $M_T$  aus, das stets eine Komponente  $M_{Tt}$  (Vektor parallel zur Achse des durchgehenden Stabes) und im allgemeinen auch eine Komponente  $M_{Tn}$  (Vektor normal zur Achse des durchgehenden Stabes) hat. Außerdem ist im allgemeinen auch noch eine Querkraft  $Q_T$  zu übertragen.

Für die Aufnahme der Momentenkomponente  $M_{Tt}$ , die der Stab  $RS$  wegen der für alle Stäbe vorausgesetzten Torsionsschlaffheit keinesfalls selbst aufnehmen kann, verwenden wir das in Abb. 2.25 gezeigte Differentialgetriebe.

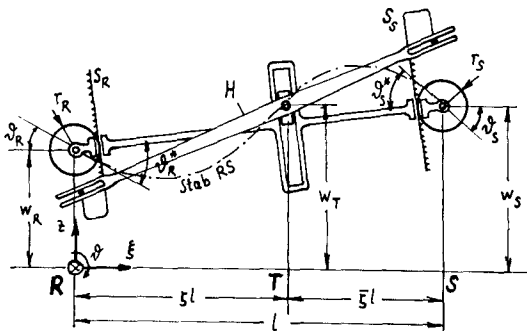
Abb. 2.25. Getriebe zur Aufnahme von  $M_T$ 

Das Moment  $M_{Tt}$  wird dabei über die den Stab  $RS$  umschließenden torsionsstarken, jedoch biegeschlaffen Hohlwellen  $H_R$  und  $H_S$  auf die Endpunkte  $R$  und  $S$  übertragen. Die Radien der beiden auf den Hohlwellen sitzenden Zahnräder  $Z_R$  und  $Z_S$  müssen zueinander im umgekehrten Verhältnis stehen wie die beiden zugehörigen Teillängen des Stabes  $RS$ :  $r_R/r_S = \xi/\zeta$ . Dieses Getriebe ist das Analogon zu der bei der Behandlung des Scheibenproblems für den durchgehenden Stab getroffenen Voraussetzung von Biegestarrheit in der Modellebene.

Das zur Aufnahme der Momentenkomponente  $M_{Tn}$  vorzusehende Getriebe ist in Abb. 2.26 dargestellt. Das erforderliche Radienverhältnis ist hier  $r_R/r_S = \zeta/\bar{\zeta}$ . Dieses Getriebe ist das Analogon zu dem bei der Behandlung des Scheibenproblems eingeführten Zahnstangengetriebe. Während beim Scheibenproblem unter Inkaufnahme einer komplizierten Handhabung des Modells auf das Zahnstangengetriebe verzichtet werden konnte (vgl. S. 143), ist die Verwendung des entsprechenden Getriebes beim Plattenproblem zwingend, wenn das Modell auch für Querkraftbiegung gültig sein soll.

Abb. 2.26. Getriebe zur Aufnahme von  $M_{Tn}$ 

Die einzige der drei beim Plattenproblem wesentlichen Auslenkungen des Anlenkpunktes  $T$ , die noch nicht infolge einer Zwangsführung (Getriebe) allein durch den Auslenkungszustand der benachbarten Ecken  $R$  und  $S$  bestimmt ist, ist die Verschiebung senkrecht zur Modellebene. Es liegt nahe, zur Vereinfachung der rechnerischen Handhabung des Modells auch diese kinematische Unbestimmtheit durch Einbau eines weiteren Getriebes zu beseitigen, z. B. nach Abb. 2.27. Dieses Getriebe benutzt die Verdrehungen  $\vartheta_R^*$  und  $\vartheta_S^*$  der Enden des Stabes  $RS$  gegenüber der sie verbindenden Sehne zur Steuerung des Anlenkpunktes  $T$ . An den Enden des Stabes  $RS$  sind Zahnscheiben befestigt, die mit den Zahnstangen  $S_R$  und  $S_S$  im Eingriff stehen. Der Hebel  $H$  addiert die Bewegungen beider Zahnstangen und bestimmt so die Auslenkung  $w_T$  des Punktes  $T$ .

Abb. 2.27. Getriebe zur Aufnahme von  $Q_T$ 

### Getriebevariante 1

Durch geeignete Wahl der Radien  $r_R$  und  $r_S$  läßt es sich erreichen, daß die von dem Getriebe hervorgebrachte Auslenkung  $w_T^{(1)}$  identisch ist mit der Aus-

lenkung  $w$  des bei  $T$  unbelasteten Stabes  $RS$  an dieser Stelle, die sich aus der Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$w = w_T^{(1)} = w_R \bar{\zeta} \left[ 1 + \frac{\zeta (\bar{\zeta} - \zeta)}{1 + 4K} \right] + w_S \zeta \left[ 1 + \frac{\bar{\zeta} (\zeta - \bar{\zeta})}{1 + 4K} \right] - \vartheta_R \left[ \frac{l \zeta \bar{\zeta} (2K + \bar{\zeta})}{1 + 4K} \right] + \vartheta_S \left[ \frac{l \bar{\zeta} \zeta (2K + \zeta)}{1 + 4K} \right] \quad (2.32)$$

ergibt. Dabei ist

$$K = \frac{3 E J}{l^2 G F_S} \quad (2.33)$$

eine dem Verhältnis von Biege- und Schubsteifigkeit proportionale Kennzahl, die bei zu vernachlässigender Querkraftverformung ( $G \rightarrow \infty$ ) verschwindet.

### Getriebevariante 2

Eine zweite, ebenfalls sinnvolle Getriebevariante ergibt sich aus der Forderung, daß die von dem Getriebe aufzunehmende Querkraft  $Q_T$  gerade nach dem Hebelgesetz auf die Ecken  $R$  und  $S$  aufgeteilt wird, was durch geeignete Wahl der Radien  $r_R$  und  $r_S$  ebenfalls möglich ist. Die von diesem Getriebe erzeugte Auslenkung ist

$$w_T^{(2)} = w_R \bar{\zeta} + w_S \zeta + \frac{l \zeta \bar{\zeta}}{2} (-\vartheta_R + \vartheta_S) \quad (2.34)$$

Es läßt sich zeigen, daß  $w_T^{(2)}$  bei querkraftfreier Biegung (Biegelinie = Kreisbogen) gleich der wirklichen Auslenkung  $w$  des bei  $T$  unbelasteten Stabes  $RS$  dort ist. Bei Querkraftbiegung ergeben sich jedoch außer für  $\zeta = \bar{\zeta} = 1/2$  Abweichungen. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Theorie liefert keine Maßstäbe, wonach die zwei Getriebevarianten beurteilt werden könnten. Diese Getriebe werden nur bei Querkraftbiegung wirksam, während exakte Anforderungen an die Modelleigenschaften nur für homogene Spannungszustände (d. h. querkraftfreie Biegung) formuliert werden können. Eine endgültige Entscheidung zugunsten der einen oder der anderen Getriebevariante wird sich erst auf Grund noch durchzuführender numerischer Rechnungen treffen lassen. Die von den beiden Getriebevarianten erzeugten Auslenkungen  $w_T^{(1)}$  und  $w_T^{(2)}$  fassen wir zu der gemeinsamen Formel

$$w_T = \omega_1 w_R + \omega_2 w_S + l [\omega_3 \vartheta_R + \omega_4 \vartheta_S] \quad (2.35)$$

zusammen, deren Koeffizienten  $\omega_1$  bis  $\omega_4$  in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt sind.

	Getriebevariante 1	Getriebevariante 2
$\omega_1$	$\bar{\zeta} \left[ 1 + \frac{\zeta (\bar{\zeta} - \zeta)}{1 + 4K} \right]$	$\bar{\zeta}$
$\omega_2$	$\zeta \left[ 1 + \frac{\bar{\zeta} (\zeta - \bar{\zeta})}{1 + 4K} \right]$	$\zeta$
$\omega_3$	$-\frac{\zeta \bar{\zeta} (2K + \bar{\zeta})}{1 + 4K}$	$-\frac{\zeta \bar{\zeta}}{2}$
$\omega_4$	$\frac{\bar{\zeta} \zeta (2K + \zeta)}{1 + 4K}$	$\frac{\zeta \bar{\zeta}}{2}$

(2.36)



### 2.4.3 Ermittlung der Querschnittsdaten für die Modellstäbe

Zur Gewinnung der äquatorialen Trägheitsmomente  $J_i$  der Modellstäbe für Biegung aus der Modellebene heraus ist der dem Original wie auch Modell aufgezwungene, durch die Krümmungen  $\kappa_x$  und  $\kappa_y$  sowie die Verdrillung  $\kappa_{xy}$  beschriebene homogene Verzerrungszustand auszuwerten. Dies geschieht in vollkommener Analogie zu dem Vorgehen bei den Scheibenmodellen. An die Stelle der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2.1) treten hier die Kirchhoffschen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} (\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ m_y &= \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} (\nu \kappa_x + \kappa_y) \\ t_{xy} &= \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \kappa_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

und an die Stelle von (2.4) und (2.5) tritt (vgl. z. B. [14])

$$M_i = J_i E \kappa_i = J_i E (\kappa_x \cos^2 \varphi_i + \kappa_y \sin^2 \varphi_i + 2 \kappa_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i) \quad (2.38)$$

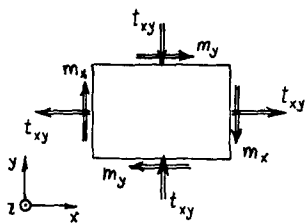


Abb. 2.28. Momente je Längeneinheit am Plattenelement

Dabei bedeuten  $h$  die Plattendicke,  $m$  und  $t$  Momente je Längeneinheit (Abb. 2.28),  $M_i$  das Biegemoment im  $i$ -ten Stabe und  $\kappa_i$  seine Krümmung. Allgemein läßt sich zeigen, daß die gesuchten äquatorialen Trägheitsmomente  $J_i$  der Modellstäbe über die einfache Beziehung

$$J_i = F_i \frac{h^2}{12} \quad (2.39)$$

mit den bereits bekannten Lösungen  $F_i$  für die entsprechenden Scheibenmodelle zusammenhängen, so daß sich hier das Anschreiben der Werte für die einzelnen Modelle erübrigt. Die Beziehung (2.39) gilt unabhängig davon, ob Getriebe nach Abb. 2.27 zur Fixierung etwaiger innerer Anlenkpunkte senkrecht zur Plattenebene vorgesehen sind oder nicht. Wie beim ebenen Spannungszustand wird auch hier für den Werkstoff des ersetzenden Originals die Querszahl  $\nu = 1/3$  gefordert.

In ähnlicher Weise führt die Betrachtung der in Abschnitt 2.4.1 beschriebenen Verzerrungszustände d) und e) für die Schubquerschnitte  $F_{si}$  der Modellstäbe auf die Beziehung

$$F_{si} = \frac{5}{9} F_i \quad (2.40)$$

Dabei bedeutet  $F_s$  die in der Balkentheorie üblicherweise benutzte, den Einfluß der ungleichmäßigen Schubspannungsverteilung berücksichtigende rechnerische Querschnittsfläche ( $F_s = F/\kappa$ ).

### 3. Steifigkeitsmatrizen

#### 3.1 Definition und allgemeine Herleitung der Steifigkeitsmatrizen

Für die praktische Anwendung der entwickelten Modellelemente ist es zweckmäßig, die an den Modellecken von außen angreifenden Kräfte und Momente (zusammengefaßt im Spaltenvektor  $f$ ) als Funktion der zugehörigen Knotenpunktsverschiebungen und -verdrehungen (zusammengefaßt im Spaltenvektor  $d$ ) darzustellen. Für das Scheibenverhalten eines Modellelementes lautet dieser Zusammenhang

$$f^s = K_f^s d^s \quad (3.1)$$

und für das Plattenverhalten entsprechend

$$f^p = K_p^p d^p \quad (3.2)$$

Die symmetrischen Matrizen  $K_f^s$  und  $K_p^p$  bezeichnen wir als die Steifigkeitsmatrizen des betrachteten Modellelementes. Man gewinnt sie am einfachsten aus der mit Hilfe des Prinzips der Arbeiten virtuellen herleitbaren Matrizenbeziehung (vgl. [15, 16, 17, hier Kapitel 10])

$$K_f = A' K_p A^2 \quad (3.3)$$

$A$  ist eine rein geometrische, im allgemeinen rechteckige Matrix ( $A'$  ist ihre Transponierte), die gemäß der Beziehung

$$v = A d \quad (3.4)$$

die Verformungen der einzelnen Modellstäbe (zusammengefaßt im Spaltenvektor  $v$ ) mit dem Auslenkungszustand  $d$  der Modellecken verknüpft. Bei der Berechnung der Matrix  $A$  wird hinsichtlich etwa vorgesehener Getriebe stets vorausgesetzt, daß diese nur die Endpunkte  $T$  der dort endenden inneren Stäbe führen (vgl. Abb. 2.24), nicht jedoch die entsprechende Stelle des durchgehenden Stabes  $R S$ . Diese Voraussetzung ist willkürlich aber zweckmäßig, da die beiden Teilstücke des durchgehenden Stabes dann nicht als zwei selbstständige Stäbe behandelt zu werden brauchen. Unterschiede im Ergebnis treten gegenüber der Alternative, den entsprechenden Punkt des durchgehenden Stabes ebenfalls durch das Getriebe mit zu fixieren, ohnehin nur bei der Varianten 2 des Getriebes zur Steuerung der Transversalauslenkung  $w$  (Abb. 2.27) auf. Die symmetrische Matrix  $K_p$  vermittelt gemäß

$$p = K_p v \quad (3.5)$$

zwischen den Verzerrungen ( $v$ ) und den zugehörigen Belastungen ( $p$ ) der einzelnen Stäbe.

<sup>2)</sup> Die oberen Indizes  $s$  bzw.  $p$  sind hier weggelassen, weil das Folgende für beide Fälle gleichermaßen gilt.

### 3.2 Steifigkeitsmatrizen für das Scheibenproblem

Der Lastvektor  $\mathbf{f}^s$  enthält für jede der drei bzw. vier Modellecken die dort von außen angreifenden Kräfte  $N_x$  und  $N_y$  (vgl. Abb. 3.1 a), also

$$\mathbf{f}^s = \{N_{xA}, N_{yA}; N_{xB}, N_{yB}; \dots\}^3 \quad (3.6)$$

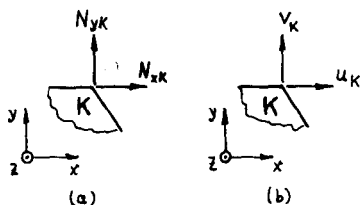


Abb. 3.1. Belastungen a) und Auslenkungen b) für eine Modellecke  $K$  (Scheibenproblem)

Der Vektor der zugehörigen Knotenpunktauslenkungen lautet (vgl. Abb. 3.1 b)

$$\mathbf{d}^s = \{u_A, v_A; u_B, v_B; \dots\} \quad (3.7)$$

Die Verformung des  $i$ -ten Modellstabes wird durch eine einzige Größe, nämlich seine Verlängerung  $u_i$  beschrieben, die Belastung des Stabes ist die in ihm wirkende Normalkraft  $N_i$ . Damit lauten die Vektoren  $\mathbf{v}^s$  und  $\mathbf{p}^s$ , wenn  $n$  die Anzahl der Stäbe des betrachteten Modellelementes ist:

$$\mathbf{v}^s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{p}^s = \{N_1, N_2, \dots, N_n\} \quad (3.9)$$

Die durch (3.5) definierte Matrix  $\mathbf{K}_p^s$  ist eine einfache Diagonalmatrix

$$\mathbf{K}_p^s = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

mit den Elementen

$$a_i = \frac{E F_i}{l_i} \quad (3.11)$$

Auf die Wiedergabe der durch (3.4) definierten Matrizen  $\mathbf{A}^s$  müssen wir hier aus Platzgründen verzichten. Es werden deshalb im folgenden für die einzelnen

<sup>3)</sup> Zur Platzersparnis werden Spaltenvektoren hier als Zeile geschrieben. Um sie nicht mit wirklichen Zeilenvektoren zu verwechseln, werden sie durch die Verwendung geschweifeter Klammern  $\{ \}$  gekennzeichnet.



$$\begin{bmatrix} \overset{*}{N}_{xA} \\ \overset{*}{N}_{yA} \\ \overset{*}{N}_{xB} \\ \overset{*}{N}_{yB} \\ \overset{*}{N}_{xC} \\ \overset{*}{N}_{yC} \\ \overset{*}{N}_{xD} \\ \overset{*}{N}_{yD} \end{bmatrix} = \frac{3}{16} \Gamma^2 \gamma \begin{bmatrix} 3 \cot \delta & -1 & -3 \cot \delta + \tan \delta & 0 & 0 & 0 & -\tan \delta & 1 \\ -1 & 3 \tan \delta & 0 & 0 & 0 & -3 \tan \delta + \cot \delta & 1 & -\cot \delta \\ -3 \cot \delta + \tan \delta & 0 & 3 \cot \delta & 1 & -\tan \delta & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \tan \delta & -1 & -\cot \delta & 0 & -3 \tan \delta + \cot \delta \\ 0 & 0 & -\tan \delta & -1 & 3 \cot \delta & 1 & -3 \cot \delta + \tan \delta & 0 \\ 0 & -3 \tan \delta + \cot \delta & -1 & -\cot \delta & 1 & 3 \tan \delta & 0 & 0 \\ -\tan \delta & 1 & 0 & 0 & -3 \cot \delta + \tan \delta & 0 & 3 \cot \delta & -1 \\ 1 & -\cot \delta & 0 & -3 \tan \delta + \cot \delta & 0 & 0 & -1 & 3 \tan \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{*}{u}_A \\ \overset{*}{v}_A \\ \overset{*}{u}_B \\ \overset{*}{v}_B \\ \overset{*}{u}_C \\ \overset{*}{v}_C \\ \overset{*}{u}_D \\ \overset{*}{v}_D \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \overset{*}{N}_{xA} \\ \overset{*}{N}_{yA} \\ \overset{*}{N}_{xB} \\ \overset{*}{N}_{yB} \\ \overset{*}{N}_{xC} \\ \overset{*}{N}_{yC} \end{bmatrix} = \frac{3}{16} \Gamma^2 \gamma \begin{bmatrix} \frac{3 + \tan^2 \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} & -\frac{2 \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{-3 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & -\tan \beta & 1 \\ -\frac{2 \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{1 + 3 \tan^2 \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{3 \tan \alpha \tan \beta - 1}{\tan \alpha + \tan \beta} & 1 & -3 \tan \beta \\ \frac{-3 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{3 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{2 \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & -\tan \alpha & -1 \\ \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{3 \tan \alpha \tan \beta - 1}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{2 \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} & \frac{3 \tan^2 \alpha + 1}{\tan \alpha + \tan \beta} & -1 & -3 \tan \alpha \\ -\tan \beta & 1 & -\tan \alpha & -1 & \tan \alpha + \tan \beta & 0 \\ 1 & -3 \tan \beta & -1 & -3 \tan \alpha & 0 & 3 (\tan \alpha + \tan \beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{*}{u}_A \\ \overset{*}{v}_A \\ \overset{*}{u}_B \\ \overset{*}{v}_B \\ \overset{*}{u}_C \\ \overset{*}{v}_C \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$A$	$r(3 + 2 \tan \delta \tan \beta) + r^2 [\tan^2 \delta \tan \alpha + \tan^2 \beta (\tan \alpha + \tan \beta)]$	$-1 + r^2 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)$	$-3r + r^2 \{\tan^3 \delta + (\tan \alpha + \tan \beta) [\tan^2 \delta + \tan \delta (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta]\}$
$A$	$-1 + r^2 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)$	$r \cdot 3 \tan^2 \delta + r^2 \{3 \tan^2 \delta \tan \beta + (\tan \alpha + \tan \beta) \cdot (6 \tan \delta \tan \beta + 3 \tan^2 \beta + 1)\}$	$r^2 (\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$
$B$	$-3r + r^2 \{\tan^3 \delta + (\tan \alpha + \tan \beta) [\tan^2 \delta + \tan \delta (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta]\}$	$r^2 (\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$	$r(3 + 2 \tan \delta \tan \alpha) + r^2 [\tan^2 \delta \tan \beta + (\tan \alpha + \tan \beta) \tan^2 \alpha]$
$B$	$r^2 (\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$	$r^2 (\tan \alpha + \tan \beta) [3 (\tan \delta + \tan \alpha) (\tan \delta + \tan \beta) - 1]$	$1 + r^2 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)$
$C$	$-r [\tan \delta (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta]$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$-r (\tan^2 \delta + \tan \delta \tan \alpha + \tan^2 \alpha)$
$C$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$-3 \tan \delta + r (-3 \tan \alpha \tan \beta + 1)$	$-r (\tan \delta + 2 \tan \alpha)$
$D$	$-r (\tan^2 \delta + \tan \delta \tan \beta + \tan^2 \beta)$	$r (\tan \delta + 2 \tan \beta)$	$-r [\tan \delta (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta]$
$D$	$r (\tan \delta + 2 \tan \beta)$	$-r [3 \tan \beta (\tan \delta + \tan \beta) + 1]$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$

$$= \frac{3}{16} \Gamma^2 \gamma$$

$\dot{M}_{xA}$	$6 \tan \delta$	$2$	$-9 \Lambda \tan \delta$	$0$	$0$	$0$	$3 \tan$
$\dot{M}_{yA}$	$2$	$6 \cot \delta$	$-9 \Lambda \cot^2 \delta$	$0$	$3 \cot \delta - \tan \delta$	$3 \Lambda (3 \cot^2 \delta - 1)$	
$\dot{Q}_A$	$-9 \Lambda \tan \delta$	$-9 \Lambda \cot^2 \delta$	$6 \Lambda^2 (3 \tan \delta - \cot \delta + 3 \cot^3 \delta)$	$0$	$-3 \Lambda (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-6 \Lambda^2 \cot \delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-3 \Lambda (3$
$\dot{M}_{xB}$	$0$	$0$	$0$	$6 \tan \delta$	$-2$	$-9 \Lambda \tan \delta$	
$\dot{M}_{yB}$	$0$	$3 \cot \delta - \tan \delta$	$-3 \Lambda (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-2$	$6 \cot \delta$	$9 \Lambda \cot^2 \delta$	
$\dot{Q}_B$	$0$	$3 \Lambda (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-6 \Lambda^2 \cot \delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-9 \Lambda \tan \delta$	$9 \Lambda \cot^2 \delta$	$6 \Lambda^2 (3 \tan \delta - \cot \delta + 3 \cot^3 \delta)$	$-3$
$\dot{M}_{xC}$	$3 \tan \delta - \cot \delta$	$0$	$-3 \Lambda (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$\cot \delta$	$-1$	$-3 \Lambda \cot \delta$	$6$
$\dot{M}_{yC}$	$0$	$0$	$0$	$-1$	$\tan \delta$	$3 \Lambda$	
$\dot{Q}_C$	$3 \Lambda (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$0$	$-6 \Lambda^2 (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$3 \Lambda \cot \delta$	$-3 \Lambda$	$-6 \Lambda^2 \cot \delta$	$9$
$\dot{M}_{xD}$	$\cot \delta$	$1$	$-3 \Lambda \cot \delta$	$3 \tan \delta - \cot \delta$	$0$	$-3 \Lambda (3 \tan \delta - \cot \delta)$	
$\dot{M}_{yD}$	$1$	$\tan \delta$	$-3 \Lambda$	$0$	$0$	$0$	
$\dot{Q}_D$	$3 \Lambda \cot \delta$	$3 \Lambda$	$-6 \Lambda^2 \cot \delta$	$3 \Lambda (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$0$	$-6 \Lambda^2 (3 \tan \delta - \cot \delta)$	

$\tan \beta \}$	$r^2 (\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$	$-r [\tan \delta (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta]$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$-r (\tan^2 \delta + \tan \delta \tan \beta + \tan^2 \beta)$	$r (\tan \delta + 2 \tan \beta)$	$\begin{matrix} * \\ u_A \end{matrix}$
	$r^2 (\tan \alpha + \tan \beta) \{3 (\tan \delta + \tan \alpha) (\tan \delta + \tan \beta) - 1\}$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$-3 \tan \delta + r (-3 \tan \alpha \tan \beta + 1)$	$r (\tan \delta + 2 \tan \beta)$	$-r [3 \tan \beta (\tan \delta + \tan \beta) + 1]$	$\begin{matrix} * \\ v_A \end{matrix}$
	$1 + r^2 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)$	$-r (\tan^2 \delta + \tan \delta \tan \alpha + \tan^2 \alpha)$	$-r (\tan \delta + 2 \tan \alpha)$	$-r [\tan \delta (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta]$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$\begin{matrix} * \\ u_B \end{matrix}$
	$r \cdot 3 \tan^2 \delta + r^2 \{3 \tan^2 \delta \tan \alpha + (\tan \alpha + \tan \beta) (6 \tan \delta \tan \alpha + 3 \tan^2 \alpha + 1)\}$	$-r (\tan \delta + 2 \tan \alpha)$	$-r [3 \tan \alpha (\tan \delta + \tan \alpha) + 1]$	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$-3 \tan \delta + r (-3 \tan \alpha \tan \beta + 1)$	$\begin{matrix} * \\ v_B \end{matrix}$
	$-r (\tan \delta + 2 \tan \alpha)$	$3 \cot \delta + \tan \alpha$	1	$-3 \cot \delta + \tan \delta$	0	$\begin{matrix} * \\ u_C \end{matrix}$
	$-r [3 \tan \alpha (\tan \delta + \tan \alpha) + 1]$	1	$3 (\tan \delta + \tan \alpha)$	0	0	$\begin{matrix} * \\ v_C \end{matrix}$
	$r (\tan \alpha - \tan \beta)$	$-3 \cot \delta + \tan \delta$	0	$3 \cot \delta + \tan \beta$	-1	$\begin{matrix} * \\ u_D \end{matrix}$
	$-3 \tan \delta + r (-3 \tan \alpha \tan \beta + 1)$	0	0	-1	$3 (\tan \delta + \tan \beta)$	$\begin{matrix} * \\ v_D \end{matrix}$

(3.16)

$3 \tan \delta - \cot \delta$	0	$3 \Delta (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$\cot \delta$	1	$3 \Delta \cot \delta$	$\begin{matrix} \Phi_A \\ \Psi_A \\ * \\ w_A \end{matrix}$
0	0	0	1	$\tan \delta$	$3 \Delta$	$\begin{matrix} \Phi_B \\ \Psi_B \\ * \\ w_B \end{matrix}$
$-3 \Delta (3 \tan \delta - \cot \delta)$	0	$-6 \Delta^2 (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$-3 \Delta \cot \delta$	$-3 \Delta$	$-6 \Delta^2 \cot \delta$	$\begin{matrix} \Phi_C \\ \Psi_C \\ * \\ w_C \end{matrix}$
$\cot \delta$	-1	$3 \Delta \cot \delta$	$3 \tan \delta - \cot \delta$	0	$3 \Delta (3 \tan \delta - \cot \delta)$	$\begin{matrix} \Phi_D \\ \Psi_D \\ * \\ w_D \end{matrix}$
-1	$\tan \delta$	$-3 \Delta$	0	0	0	
$-3 \Delta \cot \delta$	$3 \Delta$	$-6 \Delta^2 \cot \delta$	$-3 \Delta (3 \tan \delta - \cot \delta)$	0	$-6 \Delta^2 (3 \tan \delta - \cot \delta)$	
$6 \tan \delta$	-2	$9 \Delta \tan \delta$	0	0	0	
-2	$6 \cot \delta$	$-9 \Delta \cot^2 \delta$	0	$3 \cot \delta - \tan \delta$	$3 \Delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	
$9 \Delta \tan \delta$	$-9 \Delta \cot^2 \delta$	$6 \Delta^2 (3 \tan \delta - \cot \delta + 3 \cot^3 \delta)$	0	$-3 \Delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-6 \Delta^2 \cot \delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	
0	0	0	$6 \tan \delta$	2	$9 \Delta \tan \delta$	
0	$3 \cot \delta - \tan \delta$	$-3 \Delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	2	$6 \cot \delta$	$9 \Delta \cot^2 \delta$	
0	$3 \Delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	$-6 \Delta^2 \cot \delta (3 \cot^2 \delta - 1)$	$9 \Delta \tan \delta$	$9 \Delta \cot^2 \delta$	$6 \Delta^2 (3 \tan \delta - \cot \delta + 3 \cot^3 \delta)$	

(3.26)





Modellelemente nur die ausgeschriebenen Beziehungen (3.1) angegeben. Dabei sind statt der wirklichen Kräfte  $N$  und Verschiebungen  $u, v$  die dimensionslosen Größen

$$\overset{*}{N} = \frac{N L^4}{E H^3}, \quad \overset{*}{u} = \frac{u}{L}, \quad \overset{*}{v} = \frac{v}{L} \quad (3.12)$$

benutzt.  $L$  und  $H$  sind dabei beliebig wählbare Bezugsgrößen für Länge und Dicke. Ferner bedeutet

$$\gamma = \frac{h}{H}, \quad \Gamma = \frac{L}{H} \quad (3.13)$$

Die dimensionslose Steifigkeitsmatrix  $\overset{*}{K}_r^s$  für das Rechteck (Abb. 2.2) ist in (3.14), diejenige für das allgemeine Dreieck (Abb. 2.10) in (3.15) und diejenige für das Trapez (Abb. 2.16) in (3.16) wiedergegeben. Die frei wählbaren Parameter  $Z$  bzw.  $Z'$  und  $Z''$  in den Lösungen für die Stabquerschnitte haben beim allgemeinen Dreieck keinerlei Einfluß auf die Steifigkeitsmatrix. Beim Trapez ist ein Einfluß vorhanden, der jedoch nur bei inhomogenem Verzerrungszustand zum Tragen kommt (d. h. die zu verschiedenen  $Z$ -Werten gehörigen Modelle sind in ihren elastischen Eigenschaften hinsichtlich homogener Verzerrungszustände vollkommen identisch, lediglich hinsichtlich inhomogener Verzerrungszustände unterscheiden sie sich). Die angegebene Steifigkeitsmatrix gilt für den Fall  $Z = 0$  bzw.  $Z' = 0, Z'' = 0$ .

Es sei noch bemerkt, daß die Steifigkeitsmatrizen für das allgemeine Dreieck und das Trapez auch noch gültig bleiben, wenn einzelne der vorkommenden Winkel verschwinden (die Lösungssysteme für die Stabquerschnitte dagegen werden dann singulär und machen Grenzübergänge erforderlich). Aus diesem Grunde ist auch die Steifigkeitsmatrix für das rechtwinklige Dreieck hier nicht angeschrieben, denn sie läßt sich leicht als Sonderfall aus (3.15) entnehmen.

### 3.3 Steifigkeitsmatrizen für das Plattenproblem

Wie im vorigen Abschnitt sollen auch hier die Steifigkeitsmatrizen in dimensionsloser Form geschrieben werden. Wir benutzen deshalb an Stelle der wirklichen Momente  $M$ , Querkräfte  $Q$  und Verschiebungen  $w$  analog zu (3.12) die dimensionslosen Größen

$$\overset{*}{M} = \frac{M}{E H^3}, \quad \overset{*}{Q} = \frac{Q L}{E H^3}, \quad \overset{*}{w} = \frac{w}{L} \quad (3.17)$$

und führen zusätzlich zu (3.13) noch die ebenfalls dimensionslosen Kennzahlen

$$A = \frac{L}{a}, \quad \lambda_i = \frac{a}{l_i}, \quad \Delta_i = \frac{J_i}{(1/64) a h^3} = \frac{F_i}{(3/16) a h} \quad (3.18)$$

<sup>4)</sup> Diese Form ist gewählt im Hinblick auf die Verwendung bei Schalenproblemen. Wenn man nur das Scheibenproblem im Auge hat, empfiehlt sich die Benutzung von

$$\overset{**}{N} = \frac{N}{E H L} = \frac{\overset{*}{N}}{L^2} \quad (3.12^*)$$

an Stelle von  $\overset{*}{N}$ .

ein. Dabei ist  $a$  die Bezugslänge des betreffenden Modellelementes und  $l_i$  die Länge des  $i$ -ten Stabes von diesem Element.

An jeder Modellecke treten beim Plattenproblem (vgl. Abb. 3.2a) Moment  $M_x$  und  $M_y$  sowie eine Querkraft  $Q$  auf (ein Moment  $M_z$  gibt es nicht, da die

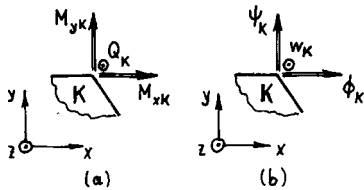


Abb. 3.2. Belastungen a) und Auslenkungen b) für eine Modellecke K (Plattenproblem)

Modellecken als Scharniergelenke mit zur  $z$ -Achse paralleler Achse vorausgesetzt sind). Damit ergibt sich für den dimensionsfreien Lastvektor

$$\mathbf{f}^p = \{ \overset{*}{M}_{xA}, \overset{*}{M}_{yA}, \overset{*}{Q}_A; \overset{*}{M}_{xB}, \overset{*}{M}_{yB}, \overset{*}{Q}_B; \dots \} \quad (3.19)$$

und entsprechend für den dimensionsfreien Auslenkungsvektor (vgl. Abb. 3.2b)

$$\mathbf{d}^p = \{ \overset{*}{\Phi}_A, \overset{*}{\Psi}_A, \overset{*}{w}_A; \overset{*}{\Phi}_B, \overset{*}{\Psi}_B, \overset{*}{w}_B; \dots \} \quad (3.20)$$

Wie beim Scheibenproblem sind auch hier die Belastungs- und Auslenkungsgrößen einheitlich für alle Modellecken dann als positiv definiert, wenn ihre Vektoren in Richtung der positiven Halbachsen des für das betreffende Modellelement zugrunde gelegten Koordinatensystems weisen. Die zugrunde gelegten Koordinatensysteme sind die gleichen wie die bei der Behandlung des Scheibenproblems benutzten (vgl. Abb. 2.2, 2.6, 2.10 und 2.16). Die Zuordnung von Vektorrichtung und Drehsinn bei Momenten und Verdrehungen erfolgt nach der Rechtsschraubenregel.

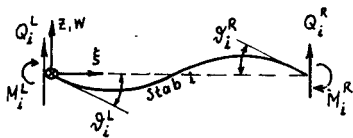


Abb. 3.3. Belastung und Verformung des  $i$ -ten Modellstabes

Zur Beschreibung der Verformung des  $i$ -ten Modellstabes sind hier zwei Größen erforderlich. In der vorliegenden Arbeit sind die Verdrehungen  $\vartheta$  der Endquerschnitte gegenüber der durch die Endpunkte des Stabes gelegten Sehne benutzt worden (Abb. 3.3). Der Vektor  $\mathbf{v}^p$  lautet damit für ein Modell mit  $n$ -Stäben (er ist von vornherein dimensionslos)

$$\mathbf{v}^p = \{ \vartheta_1^L, \vartheta_1^R; \vartheta_2^L, \vartheta_2^R; \dots; \vartheta_n^L, \vartheta_n^R \} \quad (3.21)$$

und entsprechend der Vektor  $\mathbf{p}^p$

$$\mathbf{p}^p = \{ \overset{*}{M}_1^L, \overset{*}{M}_1^R; \overset{*}{M}_2^L, \overset{*}{M}_2^R; \dots; \overset{*}{M}_n^L, \overset{*}{M}_n^R \} \quad (3.22)$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \overset{*}{M}_{xA} \\ \overset{*}{M}_{yA} \\ \overset{*}{Q}_A \\ \overset{*}{M}_{xB} \\ \overset{*}{M}_{yB} \\ \overset{*}{Q}_B \\ \overset{*}{M}_{xC} \\ \overset{*}{M}_{yC} \\ \overset{*}{Q}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \gamma^3 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cot \alpha & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} A \cot \alpha & -\frac{1}{2} \cot \alpha & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \cot \alpha & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} A \cot \alpha \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} (3 \tan \alpha + 8 \cot \alpha) & -\frac{9}{2} A (1 + 2 \cot^2 \alpha) & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} (\tan \alpha + 2 \cot \alpha) & 9 A \frac{1}{\sin^2 \alpha} & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} \tan \alpha & -\frac{9}{2} A \\ -\frac{3}{2} A \cot \alpha & -\frac{9}{2} A (1 + 2 \cot^2 \alpha) & 9 A^2 \cot \alpha (1 + 2 \cot^2 \alpha) & 6 A \cot \alpha & -3 A (1 + 3 \cot^2 \alpha) & -18 A^2 \frac{\cot \alpha}{\sin^2 \alpha} & \frac{9}{2} A \cot \alpha & -\frac{3}{2} A & 9 A^2 \cot \alpha \\ -\frac{1}{2} \cot \alpha & -\frac{5}{2} & 6 A \cot \alpha & 2 (3 \tan \alpha + \cot \alpha) & -4 & -9 A (\tan \alpha + \cot \alpha) & \frac{3}{2} (2 \tan \alpha + \cot \alpha) & \frac{1}{2} & 3 A (3 \tan \alpha + \cot \alpha) \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} (\tan \alpha + 2 \cot \alpha) & -3 A (1 + 3 \cot^2 \alpha) & -4 & 2 (\tan \alpha + 3 \cot \alpha) & 9 A \frac{1}{\sin^2 \alpha} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \tan \alpha & -6 A \\ 0 & 9 A \frac{1}{\sin^2 \alpha} & -18 A^2 \frac{\cot \alpha}{\sin^2 \alpha} & -9 A (\tan \alpha + \cot \alpha) & 9 A \frac{1}{\sin^2 \alpha} & 18 A^2 (\tan \alpha + 2 \cot \alpha + \cot^3 \alpha) & -9 A (\tan \alpha + \cot \alpha) & 0 & -18 A^2 (\tan \alpha + \cot \alpha) \\ \frac{3}{4} \cot \alpha & -\frac{11}{4} & \frac{9}{2} A \cot \alpha & \frac{3}{2} (2 \tan \alpha + \cot \alpha) & -\frac{5}{2} & -9 A (\tan \alpha + \cot \alpha) & \frac{3}{4} (8 \tan \alpha + 3 \cot \alpha) & \frac{3}{4} & \frac{9}{2} A (2 \tan \alpha + \cot \alpha) \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \tan \alpha & -\frac{3}{2} A & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \tan \alpha & 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \tan \alpha & \frac{3}{2} A \\ \frac{3}{2} A \cot \alpha & -\frac{9}{2} A & 9 A^2 \cot \alpha & 3 A (3 \tan \alpha + \cot \alpha) & -6 A & -18 A^2 (\tan \alpha + \cot \alpha) & \frac{9}{2} A (2 \tan \alpha + \cot \alpha) & \frac{3}{2} A & 9 A^2 (2 \tan \alpha + \cot \alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Psi_A \\ \overset{*}{w}_A \\ \Phi_B \\ \Psi_B \\ \overset{*}{w}_B \\ \Phi_C \\ \Psi_C \\ \overset{*}{w}_C \end{bmatrix} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \overset{*}{M}_{xA} \\ \overset{*}{M}_{yA} \\ \overset{*}{Q}_A \\ \overset{*}{M}_{xB} \\ \overset{*}{M}_{yB} \\ \overset{*}{Q}_B \\ \overset{*}{M}_{xC} \\ \overset{*}{M}_{yC} \\ \overset{*}{Q}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \gamma^3 \begin{bmatrix} 3 \tan \alpha + \cot \alpha & \frac{1}{4} (9 \tan^2 \alpha + 5) & -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha + \cot \alpha) & 3 \tan \alpha - \cot \alpha & -\frac{3}{4} (3 \tan^2 \alpha - 1) & -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha - \cot \alpha) & 3 \tan \alpha & 1 & 9 A \tan \alpha \\ \frac{1}{4} (9 \tan^2 \alpha + 5) & \frac{1}{4} (9 \tan^3 \alpha + \tan \alpha + 12 \cot \alpha) & -\frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha + 1 + 3 \cot^2 \alpha) & \frac{3}{4} (3 \tan^2 \alpha - 1) & -\frac{1}{4} (9 \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 \cot \alpha) & -\frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha - 1 - 3 \cot^2 \alpha) & \frac{1}{2} (9 \tan^2 \alpha - 1) & \tan \alpha & 9 A \tan^2 \alpha \\ -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha + \cot \alpha) & -\frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha + 1 + 3 \cot^2 \alpha) & \frac{9}{4} A^2 (4 \tan \alpha + \cot \alpha + \cot^3 \alpha) & -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha - \cot \alpha) & \frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha - 1 - 3 \cot^2 \alpha) & \frac{9}{4} A^2 (4 \tan \alpha - \cot \alpha - \cot^3 \alpha) & -9 A \tan \alpha & -3 A & -18 A^2 \tan \alpha \\ 3 \tan \alpha - \cot \alpha & \frac{3}{4} (3 \tan^2 \alpha - 1) & -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha - \cot \alpha) & 3 \tan \alpha + \cot \alpha & -\frac{1}{4} (9 \tan^2 \alpha + 5) & -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha + \cot \alpha) & 3 \tan \alpha & -1 & 9 A \tan \alpha \\ -\frac{3}{4} (3 \tan^2 \alpha - 1) & \frac{1}{4} (-9 \tan^3 \alpha + \tan \alpha + 6 \cot \alpha) & \frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha - 1 - 3 \cot^2 \alpha) & -\frac{1}{4} (9 \tan^2 \alpha + 5) & \frac{1}{4} (9 \tan^3 \alpha + \tan \alpha + 12 \cot \alpha) & \frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha + 1 + 3 \cot^2 \alpha) & -\frac{1}{2} (9 \tan^2 \alpha - 1) & \tan \alpha & -9 A \tan^2 \alpha \\ -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha - \cot \alpha) & -\frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha - 1 - 3 \cot^2 \alpha) & \frac{9}{4} A^2 (4 \tan \alpha - \cot \alpha - \cot^3 \alpha) & -\frac{3}{2} A (3 \tan \alpha + \cot \alpha) & \frac{3}{4} A (6 \tan^2 \alpha + 1 + 3 \cot^2 \alpha) & \frac{9}{4} A^2 (4 \tan \alpha + \cot \alpha + \cot^3 \alpha) & -9 A \tan \alpha & 3 A & -18 A^2 \tan \alpha \\ 3 \tan \alpha & \frac{1}{2} (9 \tan^2 \alpha - 1) & -9 A \tan \alpha & 3 \tan \alpha & -\frac{1}{2} (9 \tan^2 \alpha - 1) & -9 A \tan \alpha & 12 \tan \alpha & 0 & 18 A \tan \alpha \\ 1 & \tan \alpha & -3 A & -1 & \tan \alpha & 3 A & 0 & 4 \tan \alpha & 0 \\ 9 A \tan \alpha & 9 A \tan^2 \alpha & -18 A^2 \tan \alpha & 9 A \tan \alpha & -9 A \tan^2 \alpha & -18 A^2 \tan \alpha & 18 A \tan \alpha & 0 & 36 A^2 \tan \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Psi_A \\ \overset{*}{w}_A \\ \Phi_B \\ \Psi_B \\ \overset{*}{w}_B \\ \Phi_C \\ \Psi_C \\ \overset{*}{w}_C \end{bmatrix} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1^L \\ \vartheta_1^R \\ \vartheta_2^L \\ \vartheta_2^R \\ \vartheta_3^L \\ \vartheta_3^R \\ \vartheta_4^L \\ \vartheta_4^R \\ \vartheta_5^L \\ \vartheta_5^R \\ \vartheta_6^L \\ \vartheta_6^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\zeta} & -\frac{\omega_3}{r} & -\Lambda \omega_1 & \zeta & -\frac{\omega_4}{r} & -\Lambda \omega_2 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & -\frac{\omega_3}{r} & -\Lambda \omega_1 & 0 & -\frac{\omega_4}{r} & -\Lambda \omega_2 & 1 & 0 & \Lambda \\ 0 & 1 & -\Lambda r & 0 & 0 & \Lambda r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda r & 0 & 1 & \Lambda r & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{3}{4} - \zeta\right) \cos \alpha & -\left(\frac{5}{4} - \zeta\right) \sin \alpha - \frac{2\omega_3}{r} \cos \alpha & (1 - 2\omega_1) \Lambda \cos \alpha & \zeta \cos \alpha & -\zeta \sin \alpha - \frac{2\omega_4}{r} \cos \alpha & -2\Lambda \omega_2 \cos \alpha & \frac{1}{4} \cos \alpha & \frac{1}{4} \sin \alpha & \Lambda \cos \alpha \\ \frac{1}{4} \cos \alpha & -\frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{2\omega_3}{r} \cos \alpha & (1 - 2\omega_1) \Lambda \cos \alpha & 0 & -\frac{2\omega_4}{r} \cos \alpha & -2\Lambda \omega_2 \cos \alpha & \frac{3}{4} \cos \alpha & -\frac{1}{4} \sin \alpha & \Lambda \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -\Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \cos \alpha \\ 0 & 0 & -\Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & \Lambda \cos \alpha \\ \bar{\zeta} \cos \beta & \bar{\zeta} \sin \beta - \frac{2\omega_3}{r} \cos \beta & -2\Lambda \omega_1 \cos \beta & \left(\frac{3}{4} - \bar{\zeta}\right) \cos \beta & \left(\frac{5}{4} - \bar{\zeta}\right) \sin \beta - \frac{2\omega_4}{r} \cos \beta & \Lambda (1 - 2\omega_2) \cos \beta & \frac{1}{4} \cos \beta & -\frac{1}{4} \sin \beta & \Lambda \cos \beta \\ 0 & -\frac{2\omega_3}{r} \cos \beta & -2\Lambda \omega_1 \cos \beta & \frac{1}{4} \cos \beta & \frac{3}{4} \sin \beta - \frac{2\omega_4}{r} \cos \beta & \Lambda (1 - 2\omega_2) \cos \beta & \frac{3}{4} \cos \beta & \frac{1}{4} \sin \beta & \Lambda \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta & -\Lambda \cos \beta & 0 & 0 & \Lambda \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \cos \beta & \cos \beta & -\sin \beta & \Lambda \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Psi_A \\ w_A^* \\ \Phi_B \\ \Psi_B \\ w_B^* \\ \Phi_C \\ \Psi_C \\ w_C^* \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$\vartheta_1^L$	$1 - s$	$-\frac{\omega_{3E}}{r}$	$-\Lambda \omega_{1E}$	$s$	$-\frac{\omega_{4E}}{r}$	$-\Lambda \omega_{2E}$	0	0	$\Lambda$	0	0	0
$\vartheta_1^R$	0	$-\frac{\omega_{3E}}{r}$	$-\Lambda \omega_{1E}$	0	$-\frac{\omega_{4E}}{r}$	$-\Lambda \omega_{2E}$	1	0	$\Lambda$	0	0	0
$\vartheta_2^L$	$t$	$-\frac{\omega_{3F}}{r}$	$-\Lambda \omega_{1F}$	$1 - t$	$-\frac{\omega_{4F}}{r}$	$-\Lambda \omega_{2F}$	0	0	0	0	0	$\Lambda$
$\vartheta_2^R$	0	$-\frac{\omega_{3F}}{r}$	$-\Lambda \omega_{1F}$	0	$-\frac{\omega_{4F}}{r}$	$-\Lambda \omega_{2F}$	0	0	0	1	0	$\Lambda$
$\vartheta_3^L$	0	1	$-\Lambda r$	0	0	$\Lambda r$	0	0	0	0	0	0
$\vartheta_3^R$	0	0	$-\Lambda r$	0	1	$\Lambda r$	0	0	0	0	0	0
$\vartheta_4^L$	0	0	0	0	0	0	0	1	$-\Lambda \cot \delta$	0	0	$\Lambda \cot \delta$
$\vartheta_4^R$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\Lambda \cot \delta$	0	1	$\Lambda \cot \delta$
$\vartheta_5^L$	$(1 - s) \cos \delta$	$(1 - s) \sin \delta - \frac{\omega_{3E}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{1E} \cos \delta$	$s \cos \delta$	$s \sin \delta - \frac{\omega_{4E}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{2E} \cos \delta$	0	0	0	0	0	$\Lambda \cos \delta$
$\vartheta_5^R$	0	$-\frac{\omega_{3E}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{1E} \cos \delta$	0	$-\frac{\omega_{4E}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{2E} \cos \delta$	0	0	0	$\cos \delta$	$\sin \delta$	$\Lambda \cos \delta$
$\vartheta_6^L$	$t \cos \delta$	$-t \sin \delta - \frac{\omega_{3F}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{1F} \cos \delta$	$(1 - t) \cos \delta$	$-(1 - t) \sin \delta - \frac{\omega_{4F}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{2F} \cos \delta$	0	0	$\Lambda \cos \delta$	0	0	0
$\vartheta_6^R$	0	$-\frac{\omega_{3F}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{1F} \cos \delta$	0	$-\frac{\omega_{4F}}{r} \cos \delta$	$-\Lambda \omega_{2F} \cos \delta$	$\cos \delta$	$-\sin \delta$	$\Lambda \cos \delta$	0	0	0
$\vartheta_7^L$	$\left(\frac{3}{4} - s\right) \cos \alpha$	$-\left(\frac{5}{4} - s\right) \sin \alpha - \frac{2\omega_{3E}}{r} \cos \alpha$	$\Lambda (1 - 2\omega_{1E}) \cos \alpha$	$s \cos \alpha$	$-s \sin \alpha - \frac{2\omega_{4E}}{r} \cos \alpha$	$-2\Lambda \omega_{2E} \cos \alpha$	$\frac{1}{4} \cos \alpha$	$\frac{1}{4} \sin \alpha$	$\Lambda \cos \alpha$	0	0	0
$\vartheta_7^R$	$\frac{1}{4} \cos \alpha$	$-\frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{2\omega_{3E}}{r} \cos \alpha$	$\Lambda (1 - 2\omega_{1E}) \cos \alpha$	0	$-\frac{2\omega_{4E}}{r} \cos \alpha$	$-2\Lambda \omega_{2E} \cos \alpha$	$\frac{3}{4} \cos \alpha$	$-\frac{1}{4} \sin \alpha$	$\Lambda \cos \alpha$	0	0	0
$\vartheta_8^L$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\Lambda \cos \alpha$	0	0	0	0	0	$\Lambda \cos \alpha$	0	0	0
$\vartheta_8^R$	0	0	$-\Lambda \cos \alpha$	0	0	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\Lambda \cos \alpha$	0	0	0
$\vartheta_9^L$	$t \cos \beta$	$t \sin \beta - \frac{2\omega_{3F}}{r} \cos \beta$	$-2\Lambda \omega_{1F} \cos \beta$	$\left(\frac{3}{4} - t\right) \cos \beta$	$\left(\frac{5}{4} - t\right) \sin \beta - \frac{2\omega_{4F}}{r} \cos \beta$	$\Lambda (1 - 2\omega_{2F}) \cos \beta$	0	0	0	$\frac{1}{4} \cos \beta$	$-\frac{1}{4} \sin \beta$	$\Lambda \cos \beta$
$\vartheta_9^R$	0	$-\frac{2\omega_{3F}}{r} \cos \beta$	$-2\Lambda \omega_{1F} \cos \beta$	$\frac{1}{4} \cos \beta$	$\frac{3}{4} \sin \beta - \frac{2\omega_{4F}}{r} \cos \beta$	$\Lambda (1 - 2\omega_{2F}) \cos \beta$	0	0	0	$\frac{3}{4} \cos \beta$	$\frac{1}{4} \sin \beta$	$\Lambda \cos \beta$
$\vartheta_{10}^L$	0	0	0	$\cos \beta$	$-\sin \beta$	$-\Lambda \cos \beta$	0	0	0	0	0	$\Lambda \cos \beta$
$\vartheta_{10}^R$	0	0	0	0	0	$-\Lambda \cos \beta$	0	0	0	$\cos \beta$	$-\sin \beta$	$\Lambda \cos \beta$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc}
 1-s & -\frac{\omega_{3E}}{r} & -\Lambda \omega_{1E} & s & -\frac{\omega_{4E}}{r} & -\Lambda \omega_{2E} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\omega_{3E}}{r} & -\Lambda \omega_{1E} & 0 & -\frac{\omega_{4E}}{r} & -\Lambda \omega_{2E} & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 t & -\frac{\omega_{3F}}{r} & -\Lambda \omega_{1F} & 1-t & -\frac{\omega_{4F}}{r} & -\Lambda \omega_{2F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\
 0 & -\frac{\omega_{3F}}{r} & -\Lambda \omega_{1F} & 0 & -\frac{\omega_{4F}}{r} & -\Lambda \omega_{2F} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Lambda \\
 0 & 1 & -\Lambda r & 0 & 0 & \Lambda r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\Lambda r & 0 & 1 & \Lambda r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Lambda \cot \delta & 0 & 0 & \Lambda \cot \delta \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \cot \delta & 0 & 1 & \Lambda \cot \delta \\
 (1-s) \cos \delta & (1-s) \sin \delta - \frac{\omega_{3E}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{1E} \cos \delta & s \cos \delta & s \sin \delta - \frac{\omega_{4E}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{2E} \cos \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \cos \delta \\
 0 & -\frac{\omega_{3E}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{1E} \cos \delta & 0 & -\frac{\omega_{4E}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{2E} \cos \delta & 0 & 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta & \Lambda \cos \delta \\
 t \cos \delta & -t \sin \delta - \frac{\omega_{3F}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{1F} \cos \delta & (1-t) \cos \delta & -(1-t) \sin \delta - \frac{\omega_{4F}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{2F} \cos \delta & 0 & 0 & \Lambda \cos \delta & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\omega_{3F}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{1F} \cos \delta & 0 & -\frac{\omega_{4F}}{r} \cos \delta & -\Lambda \omega_{2F} \cos \delta & \cos \delta & -\sin \delta & \Lambda \cos \delta & 0 & 0 & 0 \\
 \left(\frac{3}{4}-s\right) \cos \alpha & -\left(\frac{5}{4}-s\right) \sin \alpha - \frac{2\omega_{3E}}{r} \cos \alpha & \Lambda(1-2\omega_{1E}) \cos \alpha & s \cos \alpha & -s \sin \alpha - \frac{2\omega_{4E}}{r} \cos \alpha & -2\Lambda \omega_{2E} \cos \alpha & \frac{1}{4} \cos \alpha & \frac{1}{4} \sin \alpha & \Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{4} \cos \alpha & -\frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{2\omega_{3E}}{r} \cos \alpha & \Lambda(1-2\omega_{1E}) \cos \alpha & 0 & -\frac{2\omega_{4E}}{r} \cos \alpha & -2\Lambda \omega_{2E} \cos \alpha & \frac{3}{4} \cos \alpha & -\frac{1}{4} \sin \alpha & \Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 \cos \alpha & \sin \alpha & -\Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & \Lambda \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 t \cos \beta & t \sin \beta - \frac{2\omega_{3F}}{r} \cos \beta & -2\Lambda \omega_{1F} \cos \beta & \left(\frac{3}{4}-t\right) \cos \beta & \left(\frac{5}{4}-t\right) \sin \beta - \frac{2\omega_{4F}}{r} \cos \beta & \Lambda(1-2\omega_{2F}) \cos \beta & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \cos \beta & -\frac{1}{4} \sin \beta & \Lambda \cos \beta \\
 0 & -\frac{2\omega_{3F}}{r} \cos \beta & -2\Lambda \omega_{1F} \cos \beta & \frac{1}{4} \cos \beta & \frac{3}{4} \sin \beta - \frac{2\omega_{4F}}{r} \cos \beta & \Lambda(1-2\omega_{2F}) \cos \beta & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \cos \beta & \frac{1}{4} \sin \beta & \Lambda \cos \beta \\
 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta & -\Lambda \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \cos \beta \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \cos \beta & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta & \Lambda \cos \beta
 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c}
 \Phi_A \\
 \Psi_A \\
 {}^*w_A \\
 \Phi_B \\
 \Psi_B \\
 {}^*w_B \\
 \Phi_C \\
 \Psi_C \\
 {}^*w_C \\
 \Phi_D \\
 \Psi_D \\
 {}^*w_D
 \end{array} \right] \quad (3.30)
 \end{aligned}$$





Die Matrix  $\bar{\mathbf{K}}_p^*$ , die die Vektoren  $\mathbf{p}^*$  und  $\mathbf{v}^*$  gemäß (3.5) verknüpft, hat folgenden Aufbau:

$$\bar{\mathbf{K}}_p^* = \frac{1}{32} \gamma^3 \cdot \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} b_1 & c_1 \\ \hline c_1 & b_1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} b_2 & c_2 \\ \hline c_2 & b_2 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \begin{array}{c|c} b_n & c_n \\ \hline c_n & b_n \end{array} \end{array} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Für ihre Elemente gelten die Beziehungen

$$b_i = 2 \lambda_i \Delta_i \frac{1 + K_i}{1 + 4 K_i}, \quad c_i = \lambda_i \Delta_i \frac{1 - 2 K_i}{1 + 4 K_i} \quad (3.24)$$

Dabei ist  $K_i$  das für den  $i$ -ten Stab maßgebende Verhältnis von Biege- und Schubsteifigkeit (vgl. (2.33)). Im Falle vernachlässigter Querkraftverformung (alle  $K_i = 0$ ) gilt

$$b_i = 2 c_i = 2 \lambda_i \Delta_i \quad (3.25)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{K}}_p^*$  für das Rechteck (Abb. 2.2) ist in (3.26), diejenige für das rechtwinklige Dreieck (Abb. 2.6) in (3.27) und diejenige für das gleichschenklige Dreieck als Sonderfall des allgemeinen Dreiecks (Abb. 2.14a) in (3.28) wiedergegeben. Für die übrigen Modellelemente ist die formelmäßige Darstellung von  $\bar{\mathbf{K}}_p^*$  nicht lohnend. Es werden statt dessen die Matrizen  $\bar{\mathbf{A}}^*$  angegeben, mit deren Hilfe  $\bar{\mathbf{K}}_p^*$  aus der Beziehung

$$\bar{\mathbf{K}}_p^* = \bar{\mathbf{A}}^{*p} \bar{\mathbf{K}}_p^* \bar{\mathbf{A}}^p \quad (3.3^*)$$

numerisch berechnet werden kann. Die  $\bar{\mathbf{A}}^p$ -Matrix für das allgemeine Dreieck (Abb. 2.10)<sup>5)</sup> ist in (3.29) wiedergegeben. Dabei bedeuten

$$r = \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta}, \quad \zeta = r \tan \alpha, \quad \bar{\zeta} = r \tan \beta, \quad \omega_i: \text{vgl. (2.36)}.$$

Die  $\bar{\mathbf{A}}^p$ -Matrix für das Trapez (Abb. 2.16)<sup>5)</sup> ist in (3.30) dargestellt. Dabei bedeuten

$$r = \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \delta}, \quad s = r \tan \alpha, \quad t = r \tan \beta.$$

<sup>5)</sup> Die Pfeile an den einzelnen Stäben bezeichnen die Orientierung der  $\xi$ -Achsen der den Stäben angepaßten Koordinatensysteme, die bei der Berechnung von  $\bar{\mathbf{A}}$  benutzt wurden (vgl. Abb. 3.3).

Bei der Berechnung der  $\omega_{iE}$  und  $\omega_{iF}$  sind folgende Werte einzusetzen:

$$\zeta_E = s, \quad \zeta_E = 1 - s, \quad \zeta_F = 1 - t, \quad \bar{\zeta}_F = t.$$

### 3.4 Steifigkeitsmatrizen für das Schalenproblem

Die Behandlung von Schalenproblemen fügt sich hier zwanglos ein. Da das Scheiben- und das Plattenverhalten der Modellelemente hier gleichzeitig in Anspruch genommen wird, faßt man (3.1) und (3.2) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^s \\ \mathbf{f}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f^s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_f^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^s \\ \mathbf{d}^p \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

zusammen.

Die für Schalenprobleme typische, in (3.31) jedoch nicht vorhandene Kopplung des Scheiben- und des Plattenverhaltens kommt dabei durch die beim Übergang auf benachbarte Modellelemente dann im allgemeinen vorzunehmende Koordinatentransformation zustande.

## 4. Schlußbemerkungen, Anwendungsmöglichkeiten

Die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Stabanordnungen sind nicht die einzig möglichen. Für das allgemeine Dreieck (Abb. 2.10) ist beispielsweise auch eine Stabanordnung nach Abb. 4.1 möglich, bei der die Lage des inneren Anlenkpunktes  $D$  von der Geometrie der Berandung abhängt. Darüber hinaus lassen sich auch Modelle angeben, die jedem beliebigen Wert von  $\nu$  angepaßt werden können [4, 5]. Diese sind jedoch in Aufbau und Handhabung wesentlich komplizierter (vgl. das quadratische Element Abb. 4.2). In die vor-

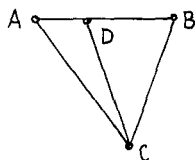


Abb. 4.1. Mögliche Stabanordnung für ein dreieckiges Gitterrostelement

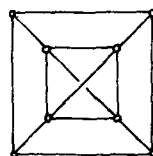


Abb. 4.2. Quadratisches Gitterrostelement, das beliebigen Querzahlen  $\nu$  angepaßt werden kann

liegende Arbeit sind Modelle dieser Art nicht mit aufgenommen worden, weil sich glücklicherweise die praktisch vorkommenden Querzahlen im allgemeinen nicht wesentlich von den Werten  $1/3$  bzw.  $1/4$  unterscheiden, auf die die Gültigkeit der hier behandelten Modelle streng genommen beschränkt ist. Im übrigen wird der numerische Einfluß der Querzahl  $\nu$  für so gering gehalten, daß sich die mit der Berücksichtigung des genauen Wertes verbundene Mühe nicht lohnt.

Die Verwendung von Getrieben zur Steuerung der inneren Anlenkpunkte läßt die Modelle etwas kompliziert erscheinen. Dies ist jedoch nicht störend, da es sich nur um Gedankenmodelle handelt, die nicht konstruktiv verwirklicht

werden sollen. Vielmehr vereinfachen die Getriebe die rechnerische Handhabung solcher Modelle ganz erheblich, da sie kinematisch einfache Verhältnisse schaffen.

Der Vorteil der Gitterrostmethode gegenüber anderen Näherungsverfahren liegt in der Hauptsache darin, daß die Berücksichtigung beliebiger Rand- und Zwischenbedingungen ohne weiteres möglich ist. Dabei eignen sich die hier abgeleiteten Modellelemente gleichermaßen zur Behandlung von Scheiben-, Platten-<sup>6)</sup> und Schalenproblemen. Im letzteren Fall denkt man sich die Schale als aus ebenen Elementen aufgebaut, die ihrerseits näherungsweise durch die beschriebenen Gitterrostmodelle ersetzt werden. Typische Anwendungsbeispiele sind u. a. die Schrumpfsitzberechnung einer rotierenden Scheibe mit Aussparungen (Abb. 4.3), die Berechnung beliebig berandeter und beliebig

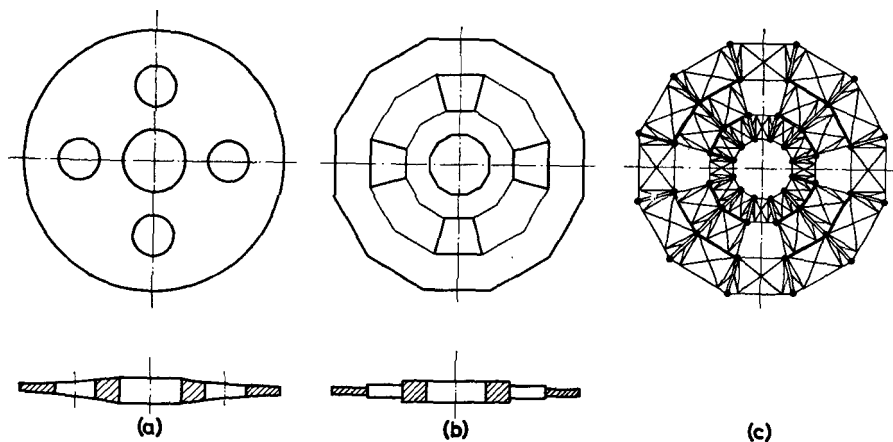


Abb. 4.3. Rotierende Scheibe mit Aussparungen

- a) Original
- b) Zwischenstufe
- c) Endgültiges Ersatzsystem

gestützter Platten (z. B. Abb. 4.4) und die Berechnung beliebig geformter Schalen (z. B. Abb. 4.5). Es können sowohl statische (Auslenkungszustand und Spannungsverteilung bei gegebener Last [3, 4] als auch dynamische Probleme (Eigenfrequenzermittlung, Ausschläge bei erzwungener Schwingung [6, 7]) behandelt werden. Bei der Ermittlung des Spannungszustandes muß

<sup>6)</sup> An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß bei der Anwendung eines Gitterrostmodells alle drei Randbedingungen des Plattenproblems ohne weiteres erfüllbar sind, gleichgültig, ob die Querkraftverformung berücksichtigt wird oder nicht. Die Kirchhoffsche Platten-theorie gestattet dagegen nur die exakte Erfüllung von zwei Randbedingungen, während die Erfüllung der dritten Randbedingung nur bei Berücksichtigung der Querkraft-verformung, z. B. nach dem Vorgehen von Reissner [18] möglich ist. Der Grund liegt darin, daß bei der wirklichen Platte die zwischen 0 und  $1/2$  liegenden Werte der Quer-dehnnzahl  $\nu$  wegen der Beziehung  $G = E/2(1 + \nu)$  mit der Voraussetzung von Schub-starrheit ( $G \rightarrow \infty$ ) unverträglich sind. Beim Gitterrost tritt diese Schwierigkeit nicht auf, da wegen der Auflösung des Kontinuums in einzelne Stäbe die Querdehnnzahl  $\nu$  keine physikalische Bedeutung hat und die genannte Beziehung nicht erfüllt zu sein braucht.

man die Stabkräfte des Gitterrostmodells in geeigneter Weise auf den in Frage kommenden Bereich verteilen. Infolge der darin liegenden Willkürlichkeit ist die Güte der Annäherung hinsichtlich des Spannungszustandes allerdings stets etwas geringer als hinsichtlich des Verformungszustandes.

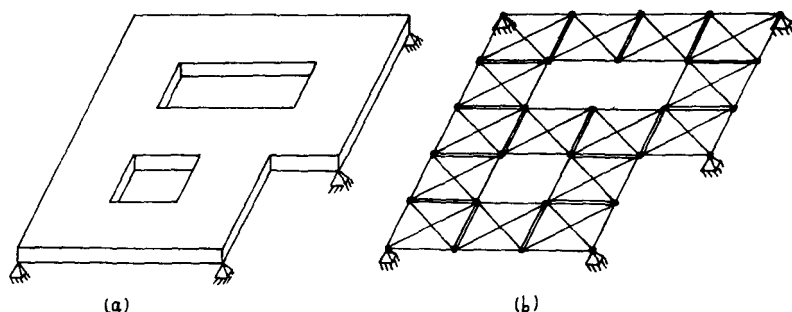
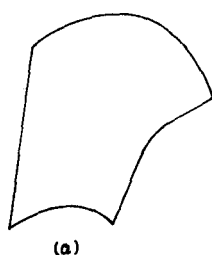


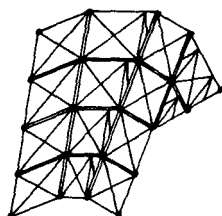
Abb. 4.4. Platte mit einspringender Ecke und Aussparungen

a) Original

b) Gitterrostmodell



(a)



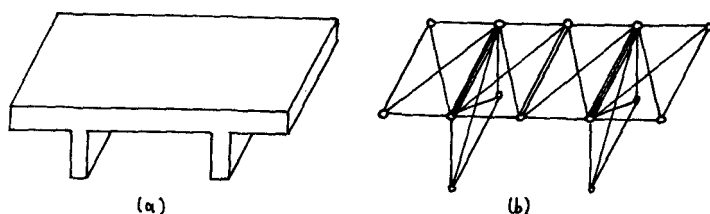
(b)

Abb. 4.5. Unregelmäßig gekrümmte und berandete Schale

a) Original

b) Gitterrostmodell

Weiterhin lassen sich die Gitterrostmodelle z. B. auf die Berechnung von Platten und Schalen mit Rippen (Abb. 4.6) und auf Stabilitätsprobleme anwenden. Schließlich ist auch die Erweiterung auf Berücksichtigung großer Verformungen und Werkstoffdämpfung (z. B. [7]) möglich.



(a)

(b)

Abb. 4.6. Platte mit Rippen

a) Original

b) Gitterrostmodell

## Schrifttumsverzeichnis

- [1] *F. Klein* und *K. Wieghardt*, Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der *Maxwellschen* Arbeiten. Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe, Bd. 8 (1904), S. 1—10 und 95—119.
- [2] *K. Wieghardt*, Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes Bd. 85 (1906), S. 139—176.
- [3] *W. Riedel*, Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der *Airy*schen Spannungsfunktion. ZAMM Bd. 7 (1927), S. 169—188; ZAMM Bd. 8 (1928), S. 159—160 (Berichtigung durch *C. Weber*).
- [4] *A. Hrennikoff*, Plane Stress and Bending of Plates by Method of Articulated Framework. Thesis presentend at the Massachusetts Institute of Technology, 1940.
- [5] *A. Hrennikoff*, Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. Journal of Applied Mechanics, vol. 8 (1941), pp. A 169 — A 175.
- [6] *F. A. Leckie*, The Application of Transfer Matrices to Plate Vibrations. Ing. Arch. 32 (1963), S. 100—111.
- [7] *J. Fahr*, Freie und erzwungene Schwingungen von Zylinderschalen. Dissertation T. H. Hannover, Abschluß voraussichtlich 1964.
- [8] *S. Levy*, Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. Journ. of the Aeronautical Sciences vol. 20 (1953), pp. 449—454.
- [9] *H. Bergmann* und *E. Pestel*, Die Anwendung von Übertragungsmatrizen auf die Untersuchung mehrzelliger Kastenträger. Z. Flugwiss. 9 (1961), S. 239—253.
- [10] *H. Bergmann* und *E. Pestel*, Die Anwendung von Übertragungsmatrizen auf die Untersuchung von Deltaflügeln. Z. Flugwiss. 10 (1962), S. 73—83.
- [11] *R. W. Clough*, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proceedings ASCE 2nd Conference on Electronic Computation Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- [12] *R. W. Clough*, The Stress Distribution of Norfolk Dam. Structures and Material, Research, Department of Civil Engineering, Series 100, Issue 19, March 1962 Institute of Engineering Research, University of California.
- [13] *W. Flügge*, Handbook of Engineering Mechanics. McGraw-Hill, New York 1962.,
- [14] *S. Timoshenko* und *S. Woinowsky-Krieger*, Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [15] *J. H. Argyris*, Energy Theorems and Structural Analysis. Aircraft Engineering 26 (1954), pp. 347, 383 and 27 (1955), pp. 42, 80, 125, 145.
- [16] *J. H. Argyris*, Matrizentheorie der Statik. Ing.-Arch. XXV (1957), S. 174—192.
- [17] *E. C. Pestel* und *F. A. Leckie*, Matrix Methods in Elastomechanics. McGraw-Hill, New York, 1963.
- [18] *E. Reissner*, The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 12 (1945), pp. A 69 — A 77.